

**MAURIZIO LENZI**

**PAOLA CAMPANA**

**ANALISI NON LINEARE  
DEI PALI DI FONDAZIONE**

**Applicazione del  
Modello Frattale**

**Forlimpopoli, 27/02/2015**

# Un Modello Frattale per l'Analisi Non lineare dei Pali di Fondazione

Maurizio Lenzi, ACMAR, Ravenna – Paola Campana, Studio Campana , Forlì.

## Premessa

Nella presente nota viene illustrato, nella forma di commenti alla presentazione PPT, il tema della *Analisi Non Lineare dei Pali di Fondazione*, argomento trattato nel Corso di Aggiornamento sulle Fondazioni Profonde tenutosi sotto l'egida dell'Ordine degli Ingegneri di Forlì - Cesena in data 27/02/2015 presso la sede del CEDAIER di Forlimpopoli (FC).

Nello specifico viene analizzato un modello non lineare *analitico* denominato “Modello Frattale”, mirato allo studio dell'interazione che si instaura tra palo e terreno a seguito dell'applicazione di un carico verticale. Il modello è stato validato da numerosi riscontri in opera forniti dai risultati delle prove di carico e si presta ad essere impiegato sia come metodo previsionale sia come strumento di back-analysis, ossia come strumento di progetto e di verifica/controllo.

Il modello frattale sviluppa un'analogia basata sulla similitudine tra la leggi costitutive non lineari che indentificano da un lato le curve di *trasferimento del carico* per il terreno d'interfaccia e dall'altro le curve rappresentative della risposta d'insieme del sistema palo-terreno. Al livello elementare dei legami di interfaccia si assume valida (lungo la superficie laterale del fusto ed alla base del palo) una legge costitutiva affine a quella proposta a suo tempo da Kondner per interpretare i risultati delle prove triassiali condotte su campioni di terreno. Al livello globale si assume invece rappresentativa la legge costitutiva espressa in termini di carichi e cedimenti del palo fornita dal metodo dell'inversa pendenza, originariamente proposto da Chin allo scopo principale di dedurre il carico limite del palo dai risultati delle prove di carico e ben convalidata sul piano sperimentale.

Il modello frattale fornisce in tale contesto l'elemento di unione tra i meccanismi associati alle due leggi costitutive citate, mostrando come dalle curve di trasferimento delle reazioni di interfaccia modellate con relazioni affini a quelle proposte da Kondner si possa sostanzialmente validare per via analitica il modello d'interazione di Chin che si desume dalle prove di carico. Il modello analitico fornisce inoltre, come risultato in realtà primario, un quadro puntuale della distribuzione degli sforzi assiali e dei cedimenti lungo il palo, che i due modelli citati non possono ovviamente fornire. In questa disamina verranno individuati i caratteri salienti del comportamento non lineare della risposta del sistema palo-terreno, evidenziando l'importanza che le deformazioni irreversibili assumono sin dai primi livelli di carico. Tali aspetti sono resi comprensibili in termini fisici semplici dal modello analitico proposto, che presenta inoltre il notevole vantaggio di poter essere facilmente implementabile mediante un foglio elettronico.

Nella presentazione verrà dapprima esaminato il caso di un palo immerso in un terreno omogeneo. In tale ambito, dopo una rassegna dei legami costitutivi lineari e non lineari, verranno definite le leggi costitutive d'interfaccia e dedotta l'equazione differenziale che esprime l'equilibrio verticale di un concio elementare. Per l'integrazione dell'equazione di equilibrio verrà adottata un'efficace analogia con l'equazione del moto di un corpo rigido, deducendo da questa analogia un bilancio energetico che eguaglia l'energia di deformazione elastica incamerata dal concio elementare al lavoro compiuto dalle tensioni tangenziali per effetto del cedimento associato all'accorciamento elastico del palo. Si deduce così che il lavoro di deformazione del vincolo laterale include sia un'aliquota plastica sia un'aliquota incrudente (computata mediante la rigidità tangente del vincolo laterale). Sostituendo nell'equazione di bilancio energetico il lavoro di deformazione plastico ed incrudente si ottiene un'equazione non lineare la cui integrazione restituisce il cedimento indotto dall'accorciamento elastico del palo.

Si deduce poi in sequenza il cedimento totale, sommando l'accorciamento elastico al cedimento impresso alla base del palo assunto come variabile indipendente, le tensioni tangenziali in base alla legge costitutiva dei vincoli d'interfaccia e lo sforzo assiale in funzioni del gradiente del cedimento. Successivamente l'analisi verrà estesa al caso, ricorrente in pratica, di terreno stratificato nel quale il modello frattale mantiene un'immutata semplicità che ne evidenzia i vantaggi applicativi. Chiude la nota e la presentazione PPT l'illustrazione di un caso di studio relativo alle fondazioni profonde del Nuovo Campus Universitario di Forlì, recentemente completato.

## **Indice degli argomenti**

- Modello Iperbolico (Kondner-Chin) e Modello Frattale (Lenzi-Campana)
- Modello Frattale – Terreno omogeneo
- Caratteristiche del modello d'interazione non lineare
- Spostamenti caratteristici e tensioni tangenziali mobilitate
- Caratteristiche dei modelli elastici e dei modelli non lineari
- Modelli costitutivi del terreno all'interfaccia laterale ed alla base
- Equazione differenziale di equilibrio del concio elementare
- Modelli asintotici: palo rigido – terreno elastico
- Modello di palo rigido e Modello di Fleming
- Modello di terreno elastico
- Caratteristiche generali delle soluzioni non lineari
- Integrazione mediante analogie con le equazioni del moto
- Integrale generale ed integrale particolare
- Lavoro interno di deformazione elastica e lavoro esterno delle tensioni tangenziali
- Lavoro plastico e lavoro incrudente nel terreno d'interfaccia
- Equazioni algebriche e differenziali dell'accorciamento elastico del palo
- Soluzione Non lineare: cedimenti, tensioni tangenziali e sforzi assiali
- Confronto tra soluzione elastica e soluzione non lineare: rigidità tangente
- Modello Frattale: reazioni di palo rigido e parametro di interazione non lineare
- Soluzione Frattale: Curva carichi e cedimenti
- Proprietà e valori asintotici del modello frattale
- Modello Frattale – Terreno Stratificato
- Esempio di Back - Analysis

Modello Iperbolico

Modello Frattale

### Modello Iperbolico e Modello Frattale

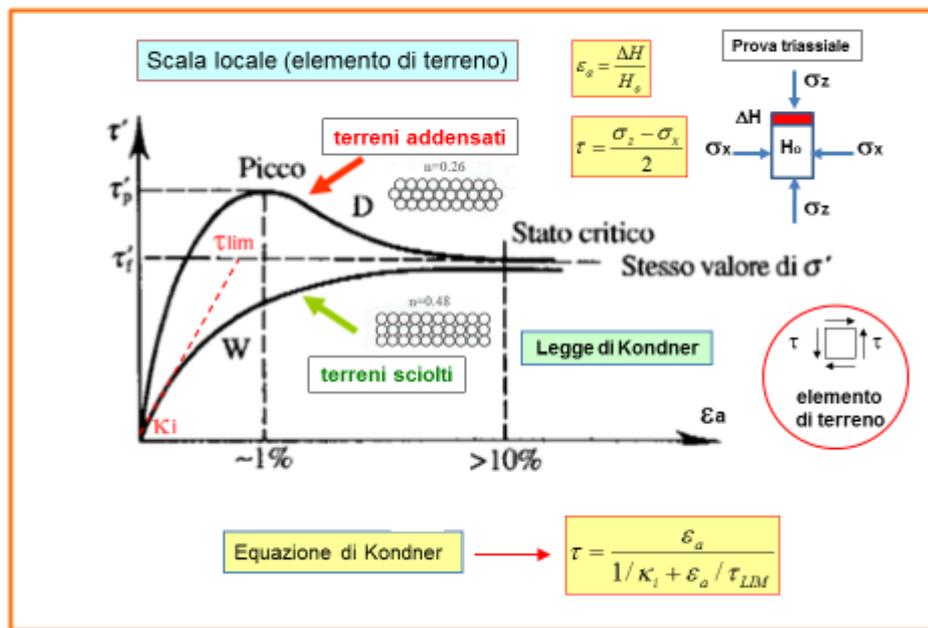
La relazione costitutiva proposta da Chin per analizzare la risposta del sistema palo-terreno prende spunto dai risultati di un'ampia campagna di prove triassiali condotte da Kondner negli anni '60 su campioni di sabbie e di argille. Kondner propose di utilizzare, per correlare i parametri di sforzo e di deformazione caratterizzanti le prove triassiali, una legge non lineare analiticamente semplice:

$$\tau = \frac{\varepsilon_a}{1/\kappa_i + \varepsilon_a/\tau_{LIM}}$$

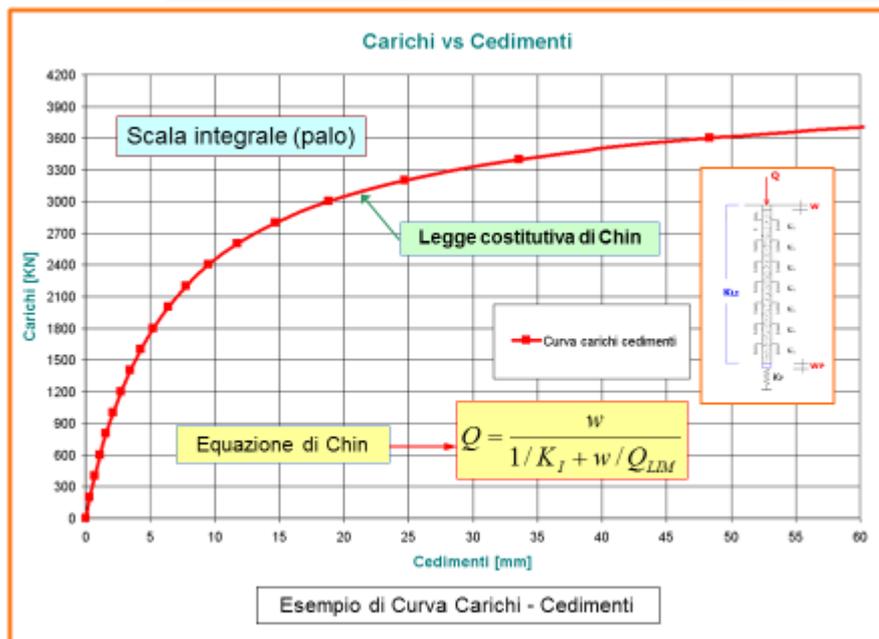
che ben si accordava con i risultati sperimentali. Chin a sua volta negli anni '70 estese la medesima legge anche allo studio dell'interazione tra pali e terreno, principalmente con lo scopo di ottenere una stima della capacità portate dai risultati forniti prove di carico mediante il metodo dell'inversa pendenza (che assume un legame lineare tra flessibilità e cedimenti del palo) e che restituisce per il legame tra carichi e cedimenti la relazione:

$$Q = \frac{w}{1/K_I + w/Q_{LIM}}$$

simile appunto a quella di Kondner.



Modello costitutivo non lineare del terreno proposto da Kondner

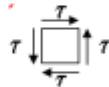


Modello costitutivo non lineare del sistema palo terreno (Chin)

Questa assunzione si fonda peraltro su due presupposti impliciti necessari per estrapolare tout court la medesima legge costitutiva dal campione di terreno al sistema palo-terreno. La prima ipotesi implicita é che il palo sia rigido, ovvero che la deformabilità del palo abbia una influenza marginale sull'interazione. La seconda ipotesi comporta invece che l'esecuzione del palo non modifichi la legge costitutiva del terreno d'interfaccia fornito dalle prove triassiali.

Il **Modello di Kondner (1963)** deduce la legge costitutiva del campione elementare di terreno:

$$\tau = \frac{\varepsilon_a}{1/\kappa_t + \varepsilon_a/\tau_{LIM}}$$

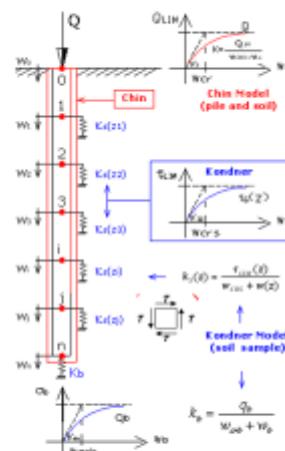


Il **Modello di Chin (1971)** fornisce una legge costitutiva integrale che mantiene una forma affine alla legge locale (con una estensione valida per **pali rigidi e terreno non perturbato** dalla esecuzione del palo):

$$Q = \frac{w}{1/K_f + w/Q_{LIM}}$$

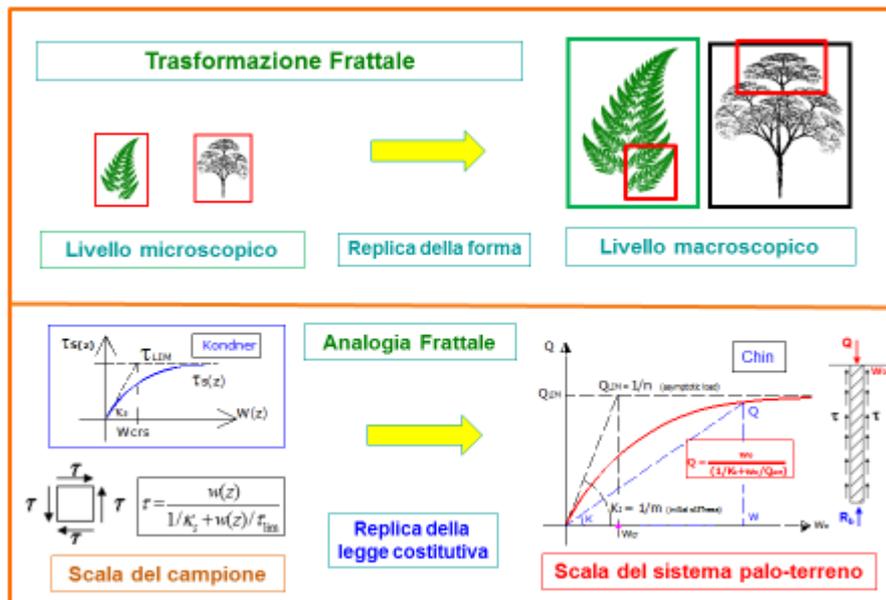


Si tratta quindi di una «**trasformazione frattale**» (Lenzi-Campana, 2015) nella quale la **risposta in scala reale** del sistema **palo - terreno** è una **replica del legame costitutivo in scala locale**.



M. Lenzi, P. Campana  
Fractal Analysis in Pile Foundations.  
DFI, 40<sup>th</sup> DFI Annual Conference,  
Oakland, California, USA, 2015

Confronto tra le leggi costitutive di Kondner e di Chin



Trasformazione frattale ed analogia frattale tra le leggi costitutive

Si tratta quindi di due ipotesi radicali, certamente di impatto sulla sostenibilità teorica del modello, che va quindi adattato per includere l'influenza della deformabilità del palo e soprattutto della tecnologia esecutiva. Il modello così formulato va poi sottoposto ad una verifica teorica, alla luce del fatto che il riscontro sperimentale fornisce una sostanziale convalida del modello di Chin.

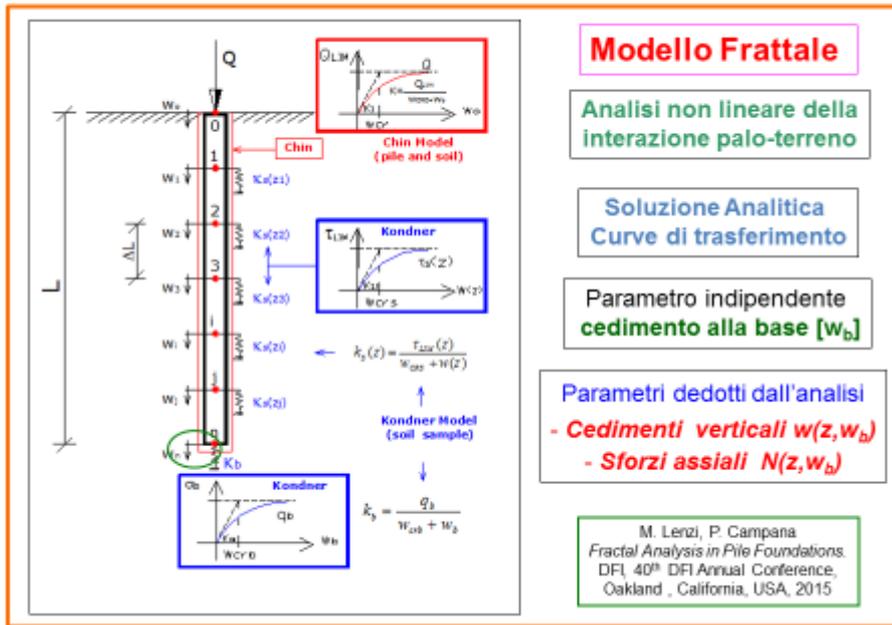
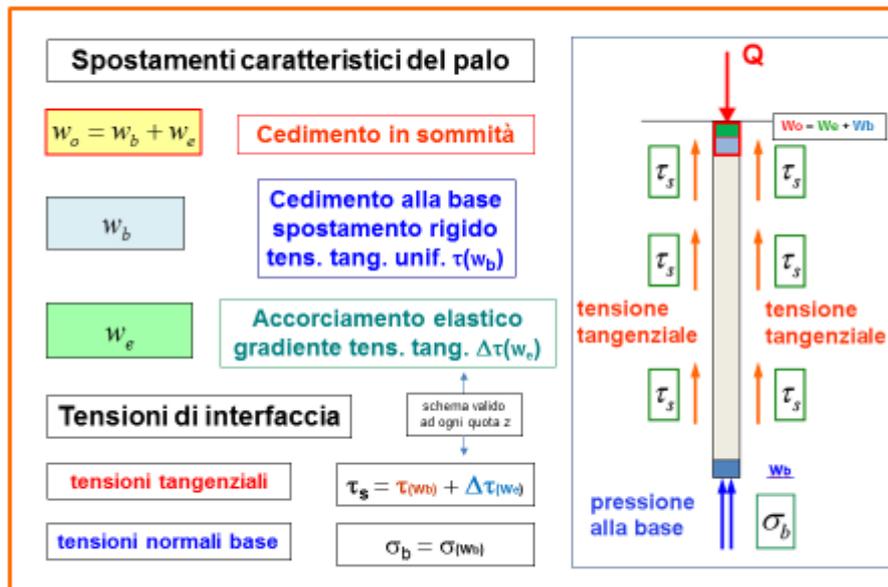


Diagramma di Flusso del Modello Frattale

Si tratta pertanto di convalidare l'ipotesi di una "trasformazione frattale" dalla scala elementare del campione di terreno alla scala integrale del sistema palo-terreno, verificando la congruità della legge costitutiva carichi-cedimenti che così ne risulta. Tale verifica può essere effettuata sia per via numerica sia per via analitica.

La via numerica utilizza modelli agli elementi finiti che impiegano elementi beam per modellare il palo (ossia elementi finiti dotati di rigidità elastica assiale) ed elementi spring (ossia molle che schematizzano il terreno, necessariamente caratterizzate da leggi costitutive non lineari che richiedono procedure di soluzione iterative). L'approccio analitico si affranca invece da questa limitazione e consente di dedurre, con i criteri di seguito illustrati, una chiara disamina ed una interessante interpretazione dei meccanismi portanti attivati dai pali.

Riepilogando, lo studio in oggetto si incentra sull'analisi non lineare dell'interazione palo-terreno ricercando una soluzione *analitica* basata sull'impiego delle *curve di trasferimento del carico* modellate mediante leggi iperboliche affini a quelle di Kondner. Scopo dell'analisi è quello di determinare le equazioni che descrivono l'andamento dei cedimenti, delle tensioni tangenziali e degli sforzi assiali lungo il fusto del palo. In questa ricerca è necessario operare un fondamentale **cambio di paradigma** utilizzando come parametro indipendente non tanto il carico applicato alla testa del palo quanto il **cedimento impresso alla base**.



*Parametri meccanici caratteristici di un palo di fondazione*

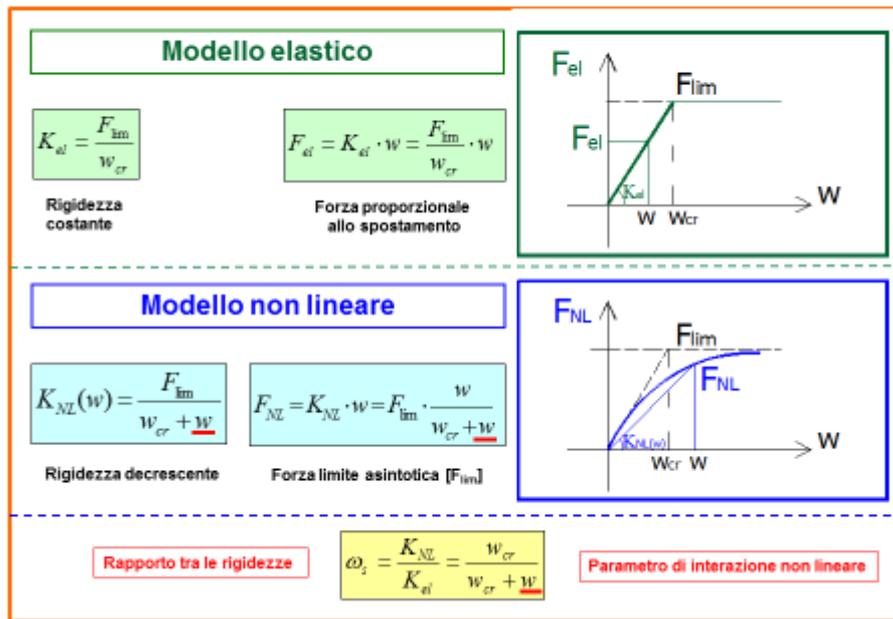
### Modello Frattale – Terreno omogeneo

Per comprendere appieno il comportamento di un palo di fondazione è necessario identificare i parametri che ne connotano la risposta meccanica. A questo proposito è semplice constatare che in ogni sezione orizzontale, individuata dalla quota  $[z]$  misurata a partire dalla punta del palo, il cedimento verticale é determinato dalla somma di due contributi:

- il cedimento impresso alla base  $[w_b]$
- l'accorciamento elastico del tratto di palo compreso tra la punta e la sezione corrente  $[w_e(z)]$

Il cedimento impresso alla base rappresenta un movimento rigido per tutte le sezioni del palo e mobilita nel terreno di interfaccia una tensione tangenziale uniforme  $\tau(z)$  lungo la superficie laterale, coerentemente con il modello locale a curve di trasferimento. A sua volta l'accorciamento elastico del palo induce nella sezione corrente un ulteriore movimento del terreno a contatto con il palo, che mobilita un incremento di reazione tangenziale  $\Delta\tau(z)$ .

Il cedimento impresso alla base innesca una pressione normale nel terreno, di valor medio pari a  $\sigma_b$ , il cui valore dipende dalla legge costitutiva assunta per il vincolo posto alla base del palo.



*Modello costitutivo elastico e non lineare*

### Modelli costitutivi lineari e non lineari

Le leggi costitutive delle reazioni che si sviluppano all'interfaccia laterale ed alla base del palo sono descritte da relazioni non lineari. Risulta pertanto utile presentare un confronto preliminare tra le leggi costitutive del modello elastico e quelle del modello iperbolico che descrive la forma analitica delle curve di trasferimento del carico. La legge elastica è contraddistinta da una rigidezza costante, pari al rapporto tra la forza limite [F<sub>lim</sub>] ed il cedimento critico [w<sub>cr</sub>] che la mobilita, e da una reazione proporzionale allo spostamento impresso. Valgono pertanto nel caso elastico le seguenti leggi costitutive:

$$K_{el} = \frac{F_{lim}}{w_{cr}}$$

$$F_{el} = K_{el} \cdot w = \frac{F_{lim}}{w_{cr}} \cdot w$$

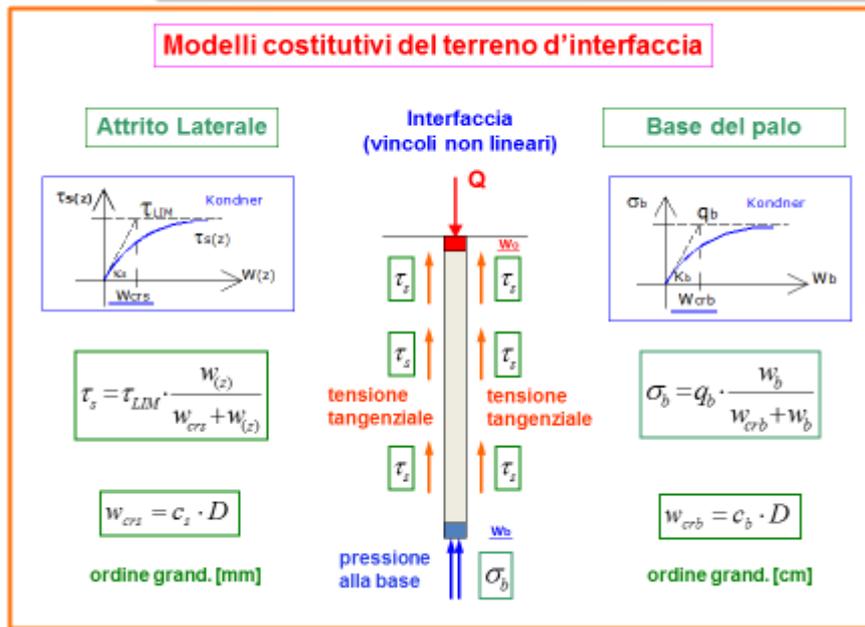
La legge iperbolica rappresenta a sua volta la legge non lineare più semplice, essendo descritta dal rapporto tra due polinomi di 1° grado. Nella sostanza la legge iperbolica si desume da quella elastica sommando, al denominatore, al cedimento critico [w<sub>cr</sub>] il cedimento corrente [w]. In tal modo la rigidezza del vincolo decresce al crescere del cedimento impresso a partire dal valore elastico iniziale [K<sub>i</sub>] (che viene attinto per w=0). La reazione mobilitata dal vincolo non lineare tende a sua volta, al crescere del cedimento impresso, al valore asintotico F<sub>lim</sub> che raggiunge per un cedimento illimitato. Per il modello iperbolico valgono pertanto le relazioni seguenti:

$$K_{NL}(w) = \frac{F_{lim}}{w_{cr} + w}$$

$$F_{NL} = K_{NL} \cdot w = F_{lim} \cdot \frac{w}{w_{cr} + w}$$

Il rapporto tra le rigidezze del modello non lineare e del modello elastico identifica il degrado di resistenza che si manifesta dal crescere del cedimento impresso ed è individuato dal rapporto:

$$\omega_s = \frac{K_{NL}}{K_{el}} = \frac{w_{cr}}{w_{cr} + w}$$



Modelli costitutivi delle reazioni laterale e di base

**Modello costitutivo delle reazioni d'interfaccia lungo la superficie laterale ed alla base**

Sulla base di quanto illustrato si può individuare univocamente il modello costitutivo della reazione tangenziale sviluppata lungo la superficie laterale del palo tramite una relazione affine a quella di Kondner. L'influenza dell'esecuzione del palo è messa in conto nei valori della tensione tangenziale limite e della rigidità iniziale. Per le finalità successive la legge iperbolica viene rielaborata adottando la forma seguente:

$$\tau_s = \tau_{LIM} \cdot \frac{W(z)}{W_{crs} + W(z)}$$

Come è semplice verificare, anche in questo caso l'aggiunta del cedimento corrente  $w(z)$  al denominatore implica che la tensione mobilitata converga alla tensione tangenziale limite al crescere illimitato dello spostamento locale  $w(z)$ , identificando in tal modo un asintoto per la resistenza massima mobilitabile. Azzerando invece tale termine si ritrova la soluzione elastica, ossia il caso di una tensione tangenziale proporzionale allo spostamento  $w(z)$  del vincolo che esibisce una rigidità elastica:

$$\kappa_s = \frac{\tau_{lim}}{W_{crs}}$$

In tale relazione  $w_{crs}$  rappresenta il cedimento critico laterale, ossia il cedimento  $w(z)$  in grado di mobilitare la resistenza limite nel caso di comportamento perfettamente elastico-plastico del vincolo laterale offerto dal terreno. Il valore del cedimento critico si esprime come percentuale del diametro del palo nella forma:

$$w_{crs} = c_s \cdot D$$

Valori tipici del coefficiente critico laterale, per terreni argillosi e sabbiosi, si ricavano dalle leggi costitutive riportate in figura. L'ordine di grandezza del cedimento critico laterale è di qualche millimetro ed è teoricamente correlato al rapporto  $G/\tau$ , attingendo valori pari a circa 400 per le argille e pari circa a 1000 per le sabbie. Valori del modulo elastico tangenziale per bassi livelli deformazioni (pertinenti appunto a regimi elastici) possono essere dedotti dalle prove soniche mirate a determinare la velocità delle onde di taglio, quali le prove MASW e le prove cross-hole.

Per quanto riguarda la resistenza mobilitata alla base si assume invece la relazione costitutiva:

$$\sigma_b = q_b \cdot \frac{w_b}{w_{crb} + w_b}$$

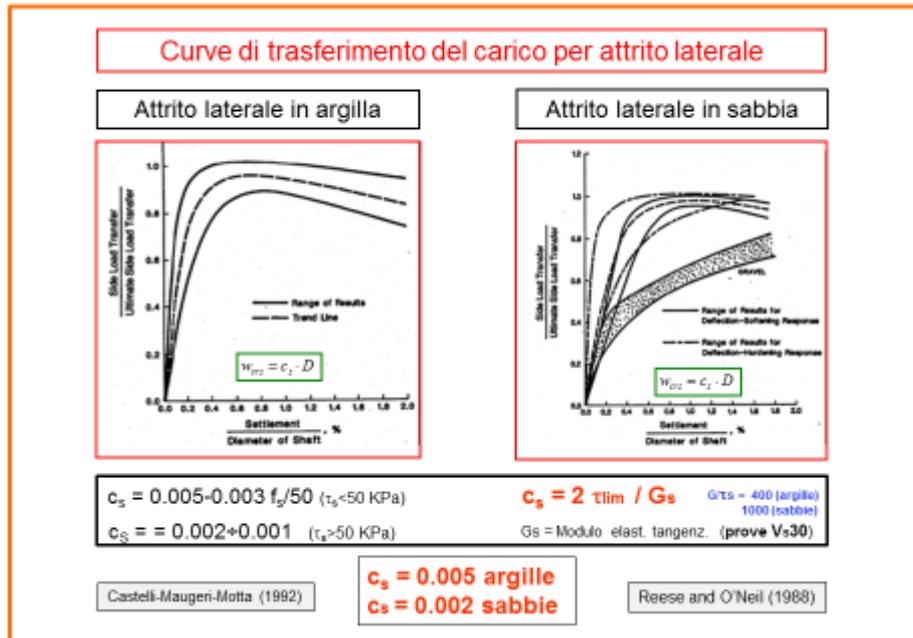
per la quale valgono considerazioni analoghe alle precedenti. In tale relazione  $q_b$  rappresenta la resistenza limite alla base e  $w_{crb}$  il cedimento critico alla base, ossia il cedimento in grado di mobilitare la tensione normale massima nel caso di un comportamento perfettamente elasto-plastico del vincolo alla base con rigidità elastica pari a:

$$\kappa_b = \frac{q_b}{w_{crb}}$$

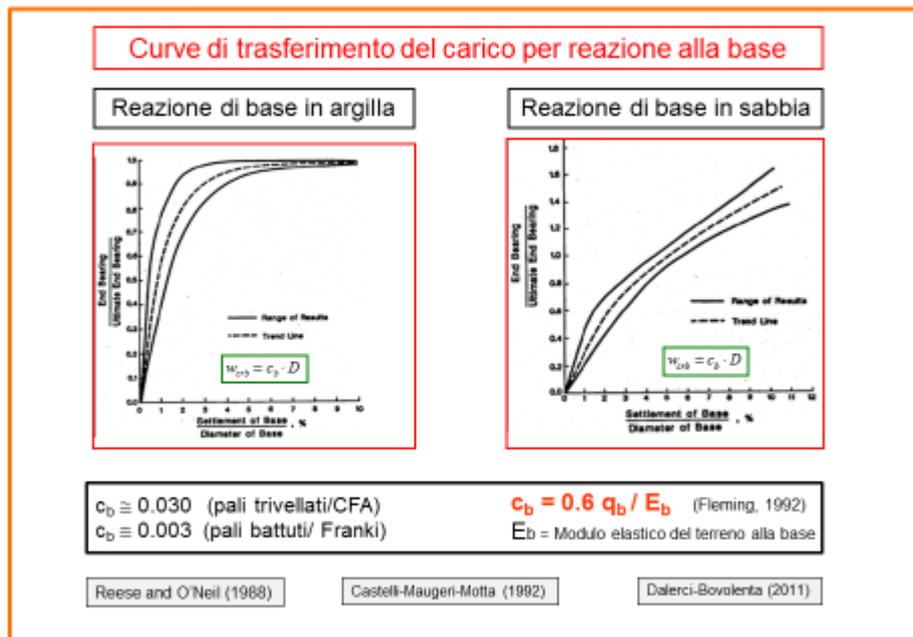
Anche il cedimento critico alla base si esprime come percentuale del diametro nella forma:

$$w_{crb} = c_b \cdot D$$

Valori del coefficiente critico alla base, per terreni argillosi e sabbiosi, si ricavano dalle leggi costitutive riportate in figura. L'ordine di grandezza del cedimento critico alla base è di qualche centimetro ed è teoricamente correlato al rapporto  $E/q_b$ .



*Cedimento critico laterale*



*Cedimento critico alla base del palo*

	<b>Equilibrio di un concio elementare</b> <b>Equilibrio verticale</b> $dN - \pi \cdot D \cdot \tau_s \cdot dz = 0$ <b>Legame costitutivo sforzi assiali e deformaz.</b> $N = EA \cdot w'$	<b>Modello Frattale</b> <b>Modello analitico</b> con utilizzo di curve di trasferimento del carico di forma <b>non lineare</b>
Legame costitutivo meccanismo per attrito laterale e alla base $\tau_s = \frac{w(z)}{w_{crs} + w(z)} \cdot \tau_{LIM}$ $\sigma_b = \frac{w_b}{w_{crb} + w_b} \cdot q_b$		
Equazione differenziale di secondo grado (2 condiz. al contorno) $EA \cdot w'' - \frac{\tau_{lim} \cdot \pi \cdot D}{w_{crs} + w} \cdot w = 0$		
<b>Equazione di equilibrio</b>		

Modello Frattale: Equazione differenziale di equilibrio

**Equazione differenziale d'interazione non lineare tra palo e terreno**

Stabiliti i legami costitutivi del terreno d'interfaccia si può ora passare alla ricerca di una soluzione analitica che descriva puntualmente l'interazione non lineare tra palo e terreno. A tale scopo si prende in esame l'equilibrio verticale di un concio infinitesimo di palo soggetto allo sforzo assiale N sulla faccia inferiore, al suo valore incrementato e di segno opposto N+dN sulla faccia superiore ed alla risultante delle azioni tangenziali agenti sulla superficie laterale del concio ( $\pi D \tau dz$ ). L'equilibrio verticale del concio si traduce quindi, sommando le forze in gioco, nell'eguaglianza:

$$\frac{dN}{dz} - \pi \cdot D \cdot \tau_s = 0$$

Tenuto conto della legge costitutiva elastica del materiale costituente il palo:

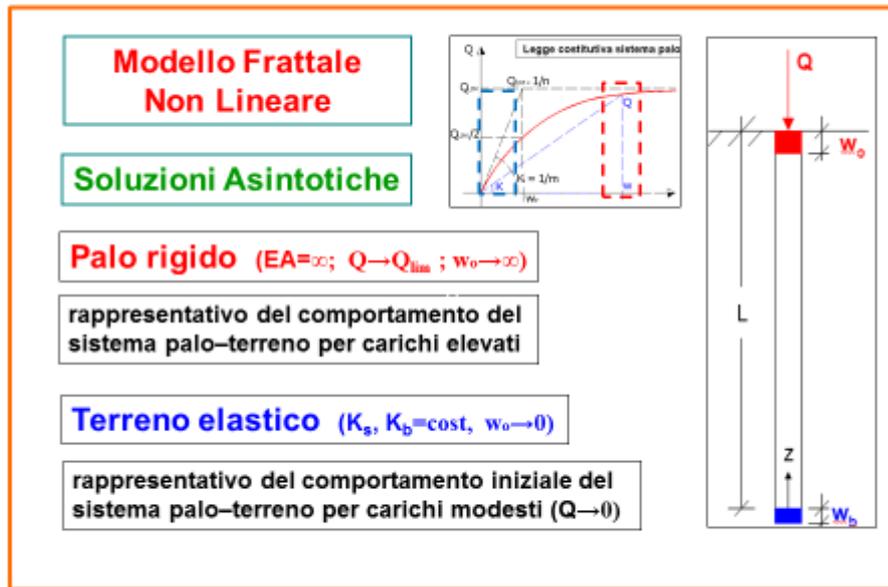
$$N = EA \cdot w'$$

e di quella non lineare assunta per il terreno a contatto con la superficie laterale:

$$\tau_s = \frac{w(z)}{w_{crs} + w(z)} \cdot \tau_{LIM}$$

si ricava per sostituzione l'equazione differenziale di equilibrio del concio infinitesimo espressa in funzione del cedimento  $w(z)$  della sezione corrente:

$$EA \cdot w'' - \frac{\tau_{lim} \cdot \pi \cdot D}{w_{crs} + w} \cdot w = 0$$



### Soluzioni asintotiche

#### Soluzioni Asintotiche (palo rigido - terreno elastico)

L'equazione differenziale di equilibrio non lineare così ottenuta non è integrabile e pertanto si ricorre normalmente a tecniche numeriche. Utilizzando ad esempio il metodo delle differenze finite per esplicitare la derivata seconda si giunge ad un sistema di equazioni non lineari, da risolvere iterativamente, avente un numero di incognite pari al numero di nodi degli elementi di suddivisione del palo, procedura pertanto identificabile come un metodo agli elementi finiti.

Viceversa, per via analitica, è possibile pervenire a forme integrabili sviluppando in serie di Taylor sino al secondo ordine il lavoro di deformazione mobilitato dal vincolo laterale in funzione dell'accorciamento elastico del palo, procedura questa che verrà ampiamente illustrata nel seguito.

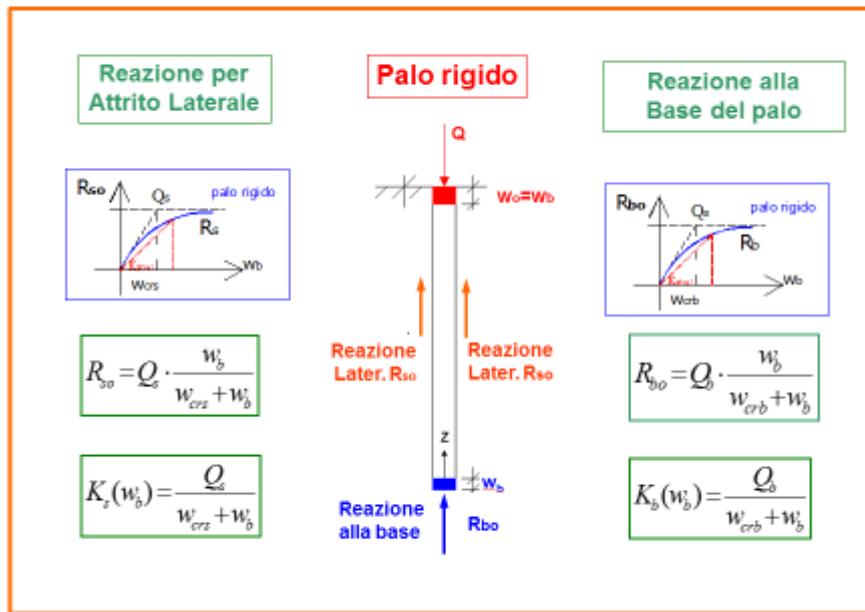
L'equazione differenziale di equilibrio è invece integrabile nei due casi limite seguenti:

- palo infinitamente rigido
- terreno elastico

L'importanza delle soluzioni asintotiche risiede nel fatto che esse sono rappresentative del comportamento del palo nelle seguenti situazioni limite:

- il modello di palo rigido fornisce la risposta tendenziale del palo per grandi spostamenti, ossia quando il cedimento della sommità e della base differiscono marginalmente essendo comunque sempre limitato a pochi millimetri il valore dell'accorciamento elastico.
- il modello di terreno elastico fornisce invece la risposta ai modesti livelli di carico e consente di individuare la rigidezza iniziale del sistema palo - terreno.

Si illustrano pertanto, prima di analizzare il caso generale, le soluzioni asintotiche pertinenti ai due casi limiti indicati



*Palo rigido e modello del terreno non lineare*

### Modello di palo rigido

La risposta di un palo rigido, ossia di un palo indeformabile e quindi soggetto ad un cedimento uniforme, si ricava considerando che la legge costitutiva assunta per le tensioni tangenziale ed alla base si estende anche alle risultanti delle reazioni laterali ed alla punta, che assumono pertanto la forma seguente:

$$R_{so} = Q_s \cdot \frac{w_b}{w_{crs} + w_b}$$

$$R_{bo} = Q_b \cdot \frac{w_b}{w_{crb} + w_b}$$

avendo indicato rispettivamente  $Q_s$  e  $Q_b$  la portata limite per attrito laterale e la portata limite per punta. La soluzione di palo rigido risulta allora di immediata identificazione assumendo come parametro indipendente il cedimento alla base  $w_b$ . In tal modo sono infatti individuati univocamente e direttamente sia il cedimento in sommità, pari a quello impresso alla base, sia le reazioni laterali ed alla base e quindi il valore del carico applicato che viene da esse equilibrato:

$$Q = R_{so} + R_{bo}$$

La soluzione che così si ottiene non può tuttavia essere ritenuta realisticamente rappresentativa del comportamento di pali snelli ed ha quindi un limitato campo di applicabilità.

Modello Constitutivo Non Lineare - Palo Rigido

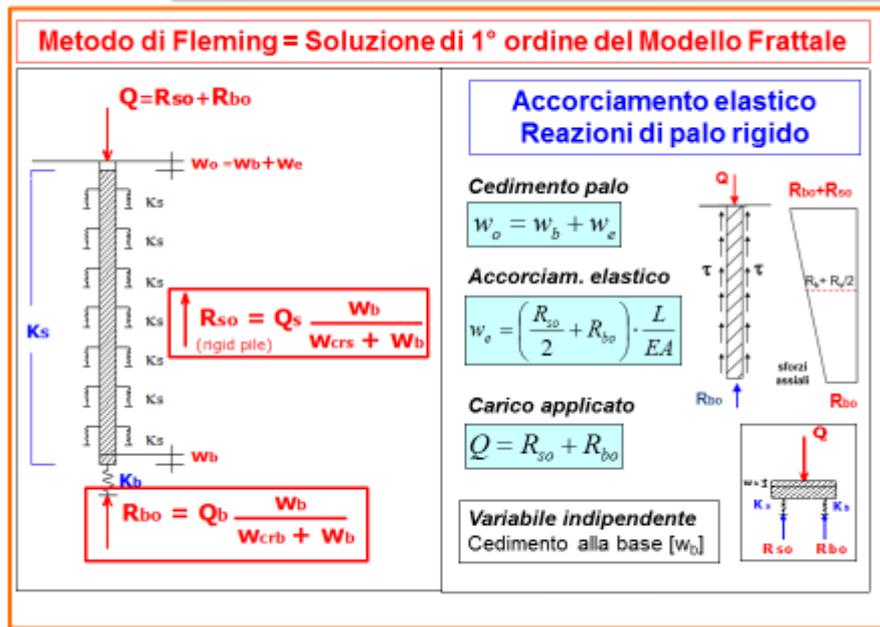
<div style="border: 1px solid red; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <math display="block">Q = R_{so} + R_{bo}</math> </div> <div style="border: 1px solid red; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <math display="block">R_{so} = Q_s \frac{w_b}{w_{crs} + w_b}</math> <p style="font-size: small;">(rigid pile)</p> </div> <div style="border: 1px solid red; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <math display="block">R_{bo} = Q_b \frac{w_b}{w_{crb} + w_b}</math> </div>	<div style="border: 1px solid blue; padding: 5px; color: blue; font-weight: bold; text-align: center;">Palo rigido</div> <p><b>Cedimento palo = Cedimento base</b></p> <div style="border: 1px solid gray; padding: 2px; margin: 5px 0;"> <math>w_o = w_b</math> </div> <p><b>Accorciam. elastico</b></p> <div style="border: 1px solid gray; padding: 2px; margin: 5px 0;"> <math>w_e = 0</math> </div> <p><b>Carico applicato</b></p> <div style="border: 1px solid gray; padding: 2px; margin: 5px 0;"> <math>Q = R_{so} + R_{bo}</math> </div> <p><b>Variable indipendente (sol. diretta):</b> Cedimento impresso alla base <math>[w_b]</math></p>
---	--

*Soluzione del modello di palo rigido e terreno non lineare*

Modello Non Lineare - Metodo di Fleming (1992)

<div style="border: 1px solid blue; padding: 5px; color: blue; font-weight: bold;">Cedimento sommità ipotesi di palo rigido</div> <div style="border: 1px solid red; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <math>w_o = w_b + w_e</math> </div> <div style="border: 1px solid blue; padding: 5px; margin: 5px 0; color: blue;">Soluzione esplicita <math>w=w(Q)</math></div> <div style="border: 1px solid gray; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <math display="block">w_b = \frac{Q}{K_s(w_b) + K_b(w_b)}</math> </div> <div style="border: 1px solid blue; padding: 5px; margin: 5px 0; color: blue; font-size: small;">Equazione di 2° grado nel cedimento alla base <math>[w_b]</math></div>	<div style="border: 1px solid blue; padding: 5px; color: blue; font-weight: bold;">Accorciamento elastico con reazioni palo rigido</div> <div style="border: 1px solid gray; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <math display="block">w_e = \left( \frac{R_{so}}{2} + R_{bo} \right) \cdot \frac{L}{EA}</math> </div> <div style="border: 1px solid red; padding: 5px; margin: 5px 0; color: red; font-size: small;">Cedimento elastico Sforzo assiale lineare</div>
---	--

*Soluzione del modello non lineare di Fleming*



*Metodo di Fleming*

### Metodo di Fleming

Nel tentativo di migliorare la soluzione di palo rigido, W.F.G. Fleming propose nel 1992 un metodo di valutazione dei cedimenti nel quale al cedimento uniforme impresso dalla base (ossia al modello di palo rigido) viene sommato l'accorciamento elastico indotto dalle tensioni tangenziali uniformi associate alle reazioni di palo rigido. In altri termini il metodo di Fleming assume:

$$w_o = w_b + w_e$$

valutando l'accorciamento elastico in funzione dello sforzo assiale medio. Essendo le tensioni tangenziali nel caso di palo rigido uniformi lungo l'altezza del palo per l'uniformità del cedimento impresso, lo sforzo assiale varia in modo lineare e presenta quindi un valore medio pari a:

$$N_{medio} = R_{so} / 2 + R_{bo}$$

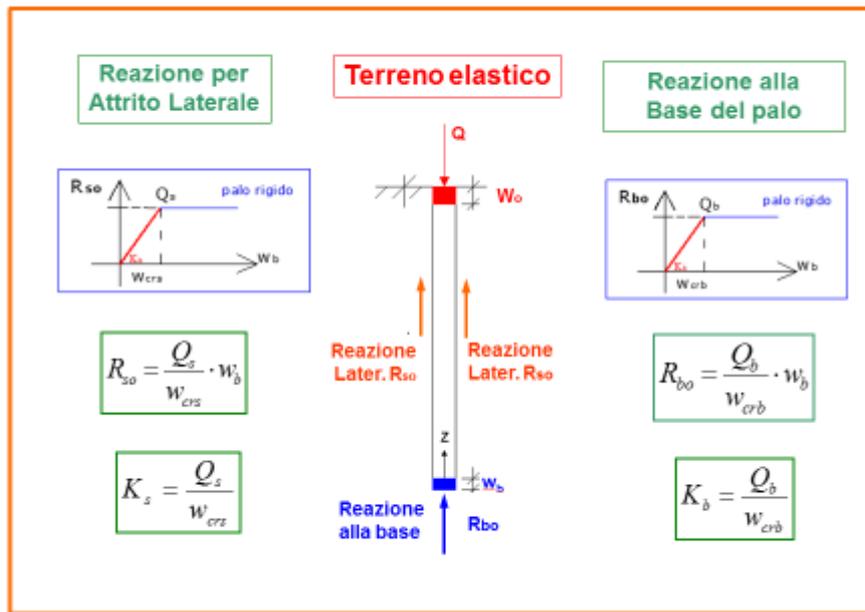
L'accorciamento elastico assume pertanto la forma:

$$w_e = \left[ \frac{R_{so}}{2} + R_{bo} \right] \cdot \frac{L}{EA}$$

Il carico in sommità viene invece ancora assunto pari alla somma delle reazioni di palo rigido:

$$Q = R_{so} + R_{bo}$$

La legittimità delle ipotesi poste alla base del metodo di Fleming sarà chiarita nel seguito sulla base del lavoro plastico attivato nel vincolo lungo la superficie laterale dall'accorciamento elastico..



*Modello di terreno elastico*

### Modello con terreno elastico

Il modello di un palo soggetto ad un carico verticale ed immerso in un terreno elastico rappresenta l'equivalente del modello di Winkler che si adotta per l'analisi della risposta del palo ai carichi orizzontali. L'importanza del modello elastico risiede anche nel fatto che esso costituisce, come si vedrà, un utile termine di confronto per i risultati forniti dall'analisi non lineare. Trattandosi di un problema di interazione, la risposta del sistema-palo terreno è funzione delle rigidezze elastiche associate al meccanismo portante per attrito laterale:

$$K_s = \frac{Q_s}{w_{crs}}$$

ed al meccanismo portante per punta:

$$K_b = \frac{Q_b}{w_{crb}}$$

nonché della rigidezza assiale propria del palo  $[EA/L]$ . Si dimostra poi facilmente che l'interazione elastica viene a dipendere dalle rigidezze relative espresse dai seguenti parametri:

$\delta = \sqrt{\frac{K_s L}{EA}}$	$\beta = \frac{K_b L}{EA}$
------------------------------------	----------------------------

La soluzione nell'ipotesi di terreno elastico somma anch'essa, come nel metodo di Fleming, al cedimento impresso alla base l'accorciamento elastico, pari ancora a quello indotto dallo sforzo di compressione medio il cui valore si ricava dall'integrazione dell'equazione differenziale di equilibrio lineare.

<b>Rigidità Assiale del Palo</b>		<b>MODELLO ELASTICO</b>	
$K_{palo} = EA/L$			
<b>Rigidità elastiche del terreno</b>			
<b>Attrito laterale</b>	<b>Portanza di base</b>		
$K_s = \frac{Q_s}{W_{crs}}$	$K_b = \frac{Q_b}{W_{crb}}$		
<b>Parametri di interazione elastica</b>			
<b>Attrito Laterale</b>	<b>Base Palo</b>		
$\delta = \sqrt{\frac{K_s L}{EA}}$	$\beta = \frac{K_b L}{EA}$		

*Parametri di interazione elastica tra palo e terreno*

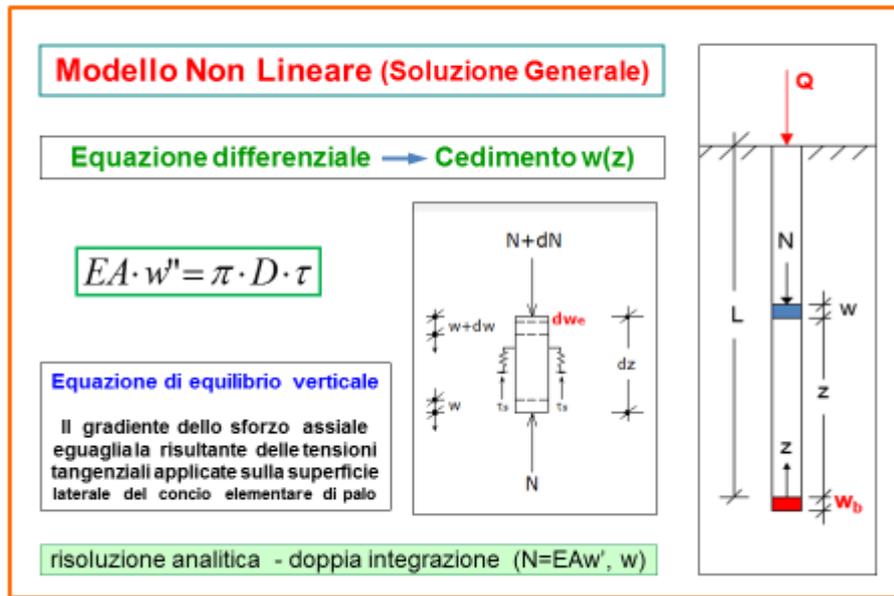
<b>Modello costitutivo elastico</b>		
	<b>Modello elastico</b>	
	<b>Cedimento palo</b> $W_o = W_b + W_e$	$\delta = \sqrt{\frac{K_s L}{EA}}$
	<b>Accorciamento elastico del palo</b> $W_e = \left[ R_{so} \cdot \frac{\cosh \delta - 1}{\delta^2} + R_{bo} \cdot \frac{\sinh \delta}{\delta} \right] \cdot \frac{L}{EA}$	
	<b>Carico applicato</b> $Q = R_{so} \cdot \frac{\sinh \delta}{\delta} + R_{bo} \cdot \cosh \delta$	
	<b>Variabile indipendente:</b> Cedimento alla base $[w_b]$	

*Soluzione del modello con terreno elastico*

Le reazioni laterale e di punta si esprimono ancora in funzione delle reazioni compute nell'ipotesi di palo rigido (e di terreno elastico), amplificate da fattori iperbolici che tengono conto dell'incremento di reazione laterale mobilitata dall'accorciamento elastico del palo lungo il fusto.

$$w_e = \left[ R_{so} \cdot \frac{\cosh \delta - 1}{\delta^2} + R_{bo} \cdot \frac{\sinh \delta}{\delta} \right] \cdot \frac{L}{EA}$$

$$Q = R_{so} \cdot \frac{\sinh \delta}{\delta} + R_{bo} \cdot \cosh \delta$$



*Interazione palo-terreno - Modello Non lineare*

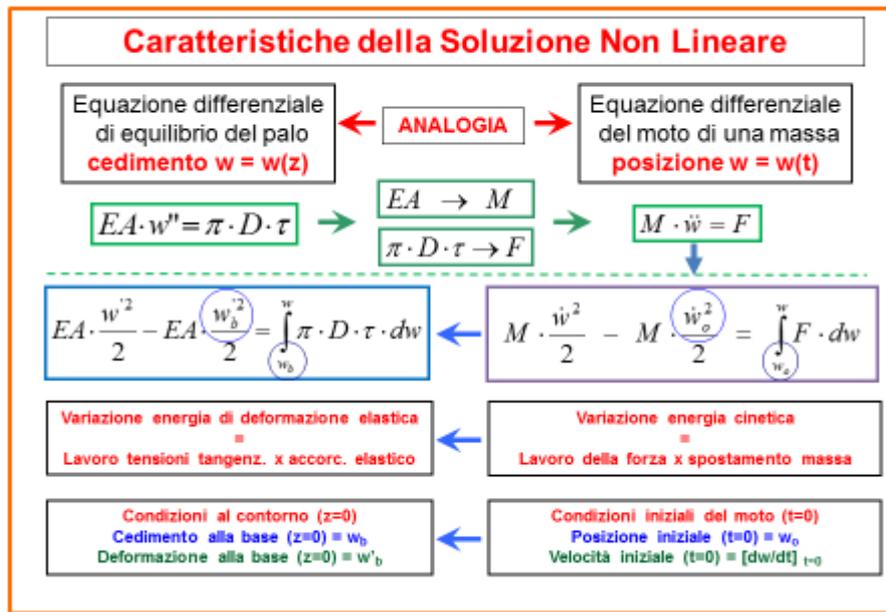
### Caratteristiche delle Soluzioni Non Lineari

Definiti gli ambiti di riferimento delle soluzioni asintotiche e della soluzione di Fleming, si passa ora ad analizzare la soluzione frattale. A tale scopo si esaminano dapprima le **caratteristiche delle soluzioni non lineari**, facendo riferimento a **proprietà generali**. Successivamente le equazioni così ottenute, valide per leggi costitutive continue monotone e derivabili, verranno particolarizzate al caso del legame costitutivo frattale.

L'equazione differenziale di equilibrio, nella sua forma più generale per pali soggetti a carichi verticali, si esprime nella forma differenziale:

$$EA \cdot w'' = \pi \cdot D \cdot \tau$$

che sancisce l'equilibrio tra il gradiente dello sforzo normale ( $dN/dz=EAw''$ ) agente tra le due facce del concio elementare e la risultante delle tensioni tangenziali ( $\pi D \tau$ ) applicate sulla superficie dello stesso concio elementare.



*Analogia tra equazione di equilibrio ed equazione del moto*

L'integrazione dell'equazione differenziale di equilibrio può essere facilitata istituendo un'analogia con l'equazione del moto di un punto materiale (o di un corpo rigido). A tale scopo si associa la rigidità assiale EA della sezione del palo alla massa M del corpo in movimento, il cedimento w(z) della sezione alla posizione w(t) occupata dal punto materiale e la risultante delle tensioni tangenziali [πDτ] alla forza F agente sulla massa in movimento. Alla variabile indipendente z corrisponde la variabile temporale t mentre all'istante iniziale del moto (t=0) corrisponde, nell'analogia, la sezione di base del palo (z=0). Si istituisce pertanto la corrispondenza:

$$\boxed{EA \cdot w'' = \pi \cdot D \cdot \tau} \quad \longrightarrow \quad \boxed{M \cdot \ddot{w} = F}$$

L'equazione di Newton ammette un integrale primo del moto che eguaglia la variazione di energia cinetica al lavoro eseguito dalla forza per effetto dello spostamento (cambio di posizione) esibito dal suo punto di applicazione. Si ha pertanto, operando a ritroso:

$$\boxed{EA \cdot \frac{w^2}{2} - EA \cdot \frac{w_b^2}{2} = \int_{w_b}^w \pi \cdot D \cdot \tau \cdot dw} \quad \longleftarrow \quad \boxed{M \cdot \frac{\dot{w}^2}{2} - M \cdot \frac{\dot{w}_0^2}{2} = \int_{w_0}^w F \cdot dw}$$

Da tale analogia si ricava che la variazione dell'energia elastica di deformazione incamerata nel concio unitario eguaglia il lavoro effettuato dalle tensioni tangenziali agenti sul suo perimetro per effetto dell'accorciamento elastico  $w_e(z)=w(z)-w_b$ .

L'analogia individua peraltro anche gli estremi di integrazione, facendo corrispondere alla posizione iniziale w(t=0) il cedimento w(z=0) alla base del palo ed alla velocità iniziale dw/dt (t=0) la deformazione dw/dz(z=0) che si manifesta alla base del palo per effetto della reazione di punta.

**Caratteristiche della Soluzione Non Lineare**

Equazione differenz. di equilibrio verticale

$$EA \cdot w'' = \pi \cdot D \cdot \tau$$

↓

$$EA \cdot \frac{w'^2}{2} = EA \cdot \frac{w_b'^2}{2} + \int_{w_b}^w \pi \cdot D \cdot \tau \cdot dw$$

Energia di deformazione elastica =  
Energia elastica reazione di base +  
Lavoro tensioni tangenz. x accorciam. elast.

Soluzione dell'equazione:  
**Integrale generale** ( $\tau=0$ ) +  
**Integrale particolare** ( $\tau \neq 0$ )

→

Integrale equazione differenz. = **Integrale generale** ( $\tau=0$ ) + **Integrale particolare** ( $\tau \neq 0$ )

condizioni al contorno      azioni lungo il fusto

*Energia di deformazione elastica*

L'integrazione dell'equazione di equilibrio fornisce quindi l'equazione seguente che esprime un bilancio energetico in termini di lavoro interno ed esterno:

$$EA \cdot \frac{w'^2}{2} = EA \cdot \frac{w_b'^2}{2} + \int_{w_b}^w \pi \cdot D \cdot \tau \cdot dw$$

La soluzione ricavata dall'analogia illustrata mostra inoltre, come deve, che l'integrale primo risulta pari alla somma di due contributi. Da un lato l'integrale generale (ossia dell'equazione omogenea) che rappresenta il caso di un palo sollecitato dalla sola reazione di base in assenza di sforzi tangenziali ( $\tau=0$ ) e che tiene conto delle condizioni al contorno. Dall'altro lato l'integrale particolare, che fornisce la risposta del palo assoggettato alle azioni tangenziali (e sole quelle) agenti lungo il fusto. Esprimendo inoltre il lavoro di deformazione nella forma:

$$E_{def} = EA \cdot \frac{w'^2}{2} = \frac{N^2}{2EA}$$

il bilancio energetico si può esprimere nella forma:

$$\frac{N^2}{2EA} = \frac{R_{bo}^2}{2EA} + \frac{N_s^2}{2EA}$$

essendo  $N_s^2/2EA$  il lavoro di deformazione elastica associato allo sforzo assiale indotto dalle tensioni tangenziali. Il confronto tra le due espressioni del bilancio energetico fornisce l'eguaglianza:

$$\frac{N^2}{2EA} = L(\tau, w_e)$$

DEDUZIONE DELLA SOLUZIONE NON LINEARE IN BASE ALLA ENERGIA DI DEFORMAZIONE ELASTICA DI UN CONCIO DI PALO DI LUNGHEZZA UNITARIA

$$E_{def} = EA \cdot \frac{w^2}{2} = \frac{N^2}{2EA}$$

Energia di deformazione elastica specifica [FL/L]

→

$$\frac{N^2(z)}{2EA} = \frac{R_{bo}^2}{2EA} + \frac{N_s^2(z)}{2EA}$$

Energia di deformazione elastica del concio unitario posto alla quota corrente

*Energia di deformazione interna*

DEDUZIONE DELLA SOLUZIONE NON LINEARE IN BASE ALLA ENERGIA DI DEFORMAZIONE ELASTICA DI UN CONCIO DI PALO DI LUNGHEZZA UNITARIA

$$\frac{N_s^2(z)}{2EA} = \int_{w_b}^w \pi \cdot D \cdot \tau(z, w) \cdot dw$$

↓

$$L_i = L_e$$

↓

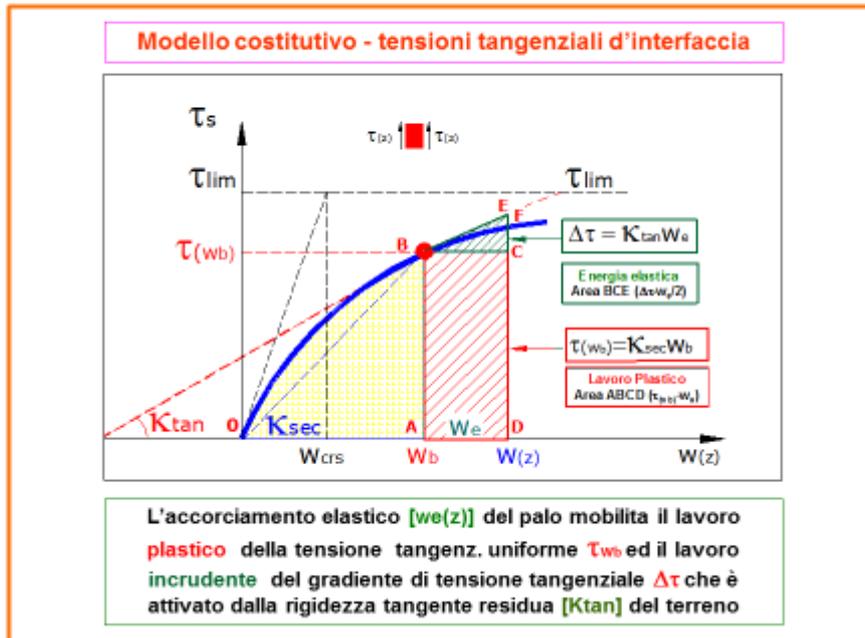
$$\frac{N^2(z)}{2EA} = \frac{R_{bo}^2}{2EA} + L_e(\tau, w_e)$$

L'energia di deformazione elast.  $N_s^2/2EA$  immagazzinata per compressione assiale è pari al lavoro  $L_e(\tau, w_e)$  compiuto dalle tensioni tangen. x accorciamento elastico

*Lavoro interno per deformazione elastica e Lavoro esterno*

che esprime la circostanza attesa che il lavoro interno, ossia l'energia di deformazione elastica incamerata dal concio elementare per effetto della compressione assiale associata alle tensioni tangenziali, eguaglia il lavoro esterno compiuto dalle stesse tensioni tangenziali agenti sulla superficie laterale del concio infinitesimo. Ne consegue che il bilancio energetico può esprimersi nella forma:

$$\frac{N^2}{2EA} = \frac{R_{bo}^2}{2EA} + L_e(\tau, w_e)$$



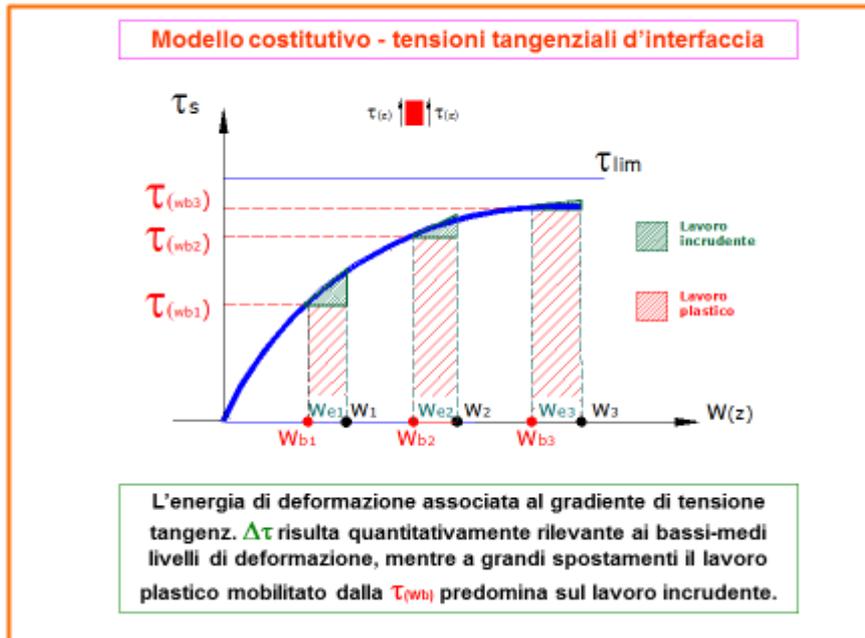
*Legame costitutivo di interfaccia per attrito laterale*

### Lavoro di deformazione delle tensioni tangenziali per accorciamento elastico del palo

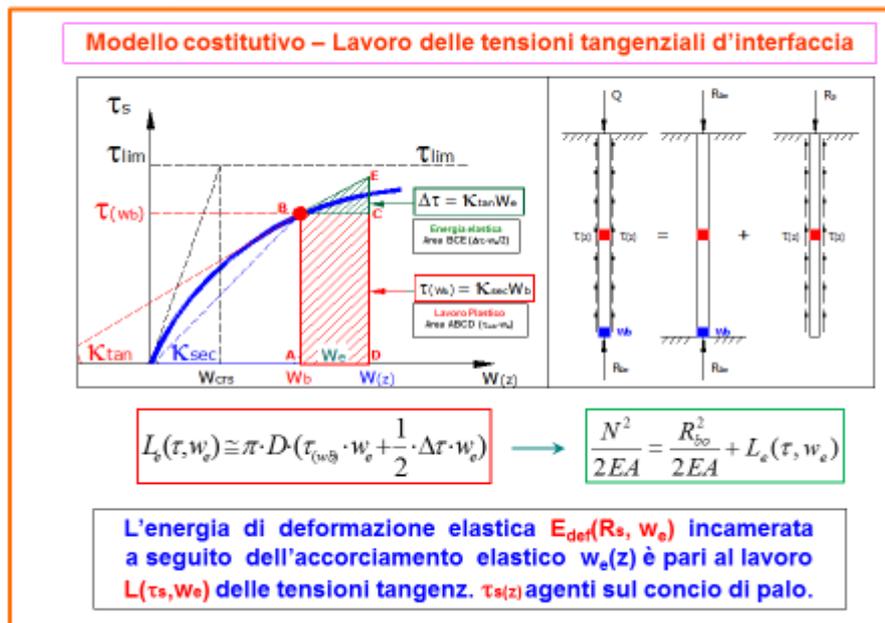
Al fine di individuare compiutamente il bilancio energetico ed evidenziare il ruolo svolto dalle tensioni tangenziali, occorre quindi esplicitare il lavoro esterno da queste compiuto per effetto del cedimento indotto dall'accorciamento elastico del palo. A tale scopo si considera il legame costitutivo illustrato in figura, che riporta in ascissa il movimento dell'interfaccia  $w(z)$  ed in ordinata la tensione tangenziale da questo mobilitata  $\tau_s(z)$ . Alla quota corrente il cedimento del palo  $w(z)$  si compone del movimento rigido corrispondente al cedimento impresso alla base ( $w_b$ ) e del cedimento indotto dall'accorciamento elastico  $w_e(z)$  del tratto sottostante la sezione. Per effetto del cedimento impresso alla base il vincolo compie un lavoro che corrisponde all'area campita di giallo mobilitando la tensione  $\tau(w_b)$  (uniforme lungo tutto il fusto). L'energia di deformazione associata al cedimento per accorciamento elastico del palo è invece individuata dall'area ABFCD che nel seguito viene approssimata dall'area del trapezio ABECD, procedura che analiticamente corrisponde a troncare al secondo ordine lo sviluppo in serie di Taylor del lavoro di deformazione ABFCD. Si evidenzia peraltro come il lavoro plastico corrisponda al modello di Fleming, che fa avvenire il cedimento  $w_e(z)$  senza variare le tensioni tangenziali  $\tau(w_b)$ . Inoltre è semplice constatare che il lavoro includente BCE risulta rilevante a medio-bassi livelli di sollecitazione, divenendo viceversa il lavoro plastico preponderante per elevati livelli di carico e di ampiezza dei cedimenti.

Con l'ipotesi introdotta, che computa il lavoro di deformazione associato all'accorciamento elastico del palo come somma di un lavoro plastico (area del rettangolo ABCD) e di un lavoro includente (area del triangolo BEC), il lavoro esterno compiuto dalle tensioni tangenziali diviene semplicemente pari a:

$$L_e(\tau, w_e) \cong \pi \cdot D \cdot (\tau_{(wb)} \cdot w_e + \frac{1}{2} \cdot \Delta\tau \cdot w_e)$$



*Lavoro plastico e lavoro inelastico del vincolo laterale*



*Bilancio energetico del vincolo laterale*

L'incremento di tensione tangenziale risulta anch'esso funzione del cedimento elastico risultando:

$$\Delta\tau = \kappa_{tan}(w_b) \cdot w_e$$

essendo  $\kappa_{tan}(w_b)$  la rigidezza tangente del vincolo attivata dal cedimento rigido del palo  $[w_b]$ .

**Modello Costitutivo del Terreno Non Lineare**

$$N(z) = \sqrt{R_{bo}^2(w_b) + 2 \cdot \frac{EA}{L} \cdot \left( R_{so}(w_b) \cdot w_e(z) + \underline{K_{tan}}(w_b) \cdot \frac{w_e^2(z)}{2} \right)}$$

Energia di deformazione elastica del conico elementare di palo

$$N(z) = EA \cdot \frac{dw_e(z)}{dz}$$

Legge costitutiva del palo

$$K_{tan}(w_b) = \frac{dR_{so}(w_b)}{dw_b}$$

Rigidezza tangente

**$K_{tan} = 0$  [ $\Delta\tau=0$ ] - Soluzione analitica del 1° ordine**  
**Modello : non lineare (0- $w_b$ ) - plastico ( $w_b-w$ ) [Fleming]**

**$K_{tan} \neq 0$  [ $\Delta\tau \neq 0$ ] - Soluzione analitica del 2° ordine**  
**Modello : non lineare (0- $w_b$ ) - incrudente ( $w_b-w$ ) [Fratiale]**

*Relazione algebrica tra sforzo assiale ed accorciamento elastico*

**Modello Non Lineare**

**Equazione differenziale → Accor. elast.  $w_e(z)$**

$$EA \cdot \frac{dw_e(z)}{dz} = \sqrt{R_{bo}^2(w_b) + 2 \cdot \frac{EA}{L} \cdot \left( R_{so}(w_b) \cdot w_e(z) + K_{tan}(w_b) \cdot \frac{w_e^2(z)}{2} \right)}$$

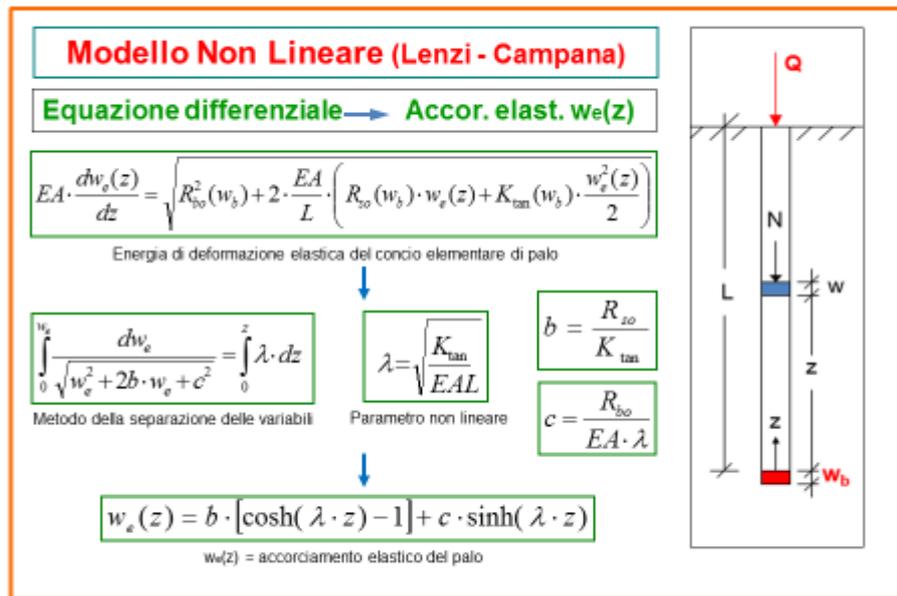
Energia di deformazione elastica del conico elementare di palo

*Relazione differenziale del cedimento per accorciamento elastico*

Operando le varie sostituzioni si ricava l'equazione algebrica seguente che correla lo sforzo assiale al cedimento indotto dall'accorciamento elastico, ottenendo:

$$N(z) = \sqrt{R_{bo}^2(w_b) + 2 \cdot \frac{EA}{L} \cdot \left( R_{so}(w_b) \cdot w_e(z) + K_{tan}(w_b) \cdot \frac{w_e^2(z)}{2} \right)}$$

In tale relazione sono state esplicitate le reazioni compressive,  $R_{so}$ ,  $R_{bo}$ , (e la rigidezza laterale totale  $K_{tan}$ ) mobilitate dal terreno lungo il fusto del palo ed alla punta per effetto del cedimento impresso alla base. Come si può notare, la soluzione di Fleming (che assume  $K_{tan}=0$ ) e quella Frattale individuano i due limiti entro i quali rientra la soluzione effettiva.



*Algoritmo risolutivo del modello non lineare*

Inserendo ora nell'equazione algebrica il legame costitutivo delle tensioni interne:

$$N(z) = EA \cdot \frac{dw_e(z)}{dz}$$

si ricava l'equazione differenziale ricercata del modello non lineare:

$$EA \cdot \frac{dw_e(z)}{dz} = \sqrt{R_{bo}^2(w_b) + 2 \cdot \frac{EA}{L} \cdot \left( R_{so}(w_b) \cdot w_e(z) + K_{tan}(w_b) \cdot \frac{w_e^2(z)}{2} \right)}$$

Con la sostituzione illustrata, l'equazione algebrica che lega lo sforzo assiale al cedimento per accorciamento elastico si trasforma quindi in un'equazione differenziale funzione del cedimento  $w_e(z)$ . L'espressione all'interno della radice quadrata è un polinomio di secondo grado nella variabile  $w_e(z)$ , essendo gli altri termini delle costanti che dipendono dal cedimento impresso alla base del palo,  $w_b$ , che è un parametro assegnato. L'equazione differenziale così ottenuta è integrabile con la tecnica di separazione delle variabili. Separando quindi i termini dipendenti da  $w_e$  da quelli dipendenti da  $z$  ed integrando si ricava infine l'equazione:

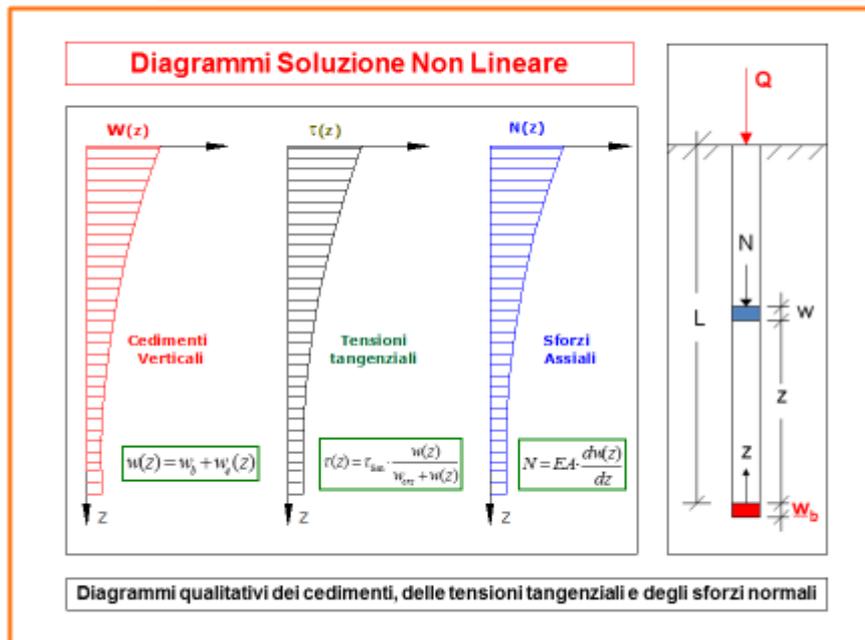
$$w_e(z) = b \cdot [\cosh(\lambda \cdot z) - 1] + c \cdot \sinh(\lambda \cdot z)$$

che fornisce il **cedimento per accorciamento elastico  $w_e(z)$** . Come si può notare e come atteso, tale cedimento è nullo alla base del palo e massimo in sommità. I termini  $\lambda$ ,  $b$ ,  $c$  sono costanti dipendenti dal cedimento impresso alla base [ $w_b$ ] ed hanno le espressioni seguenti:

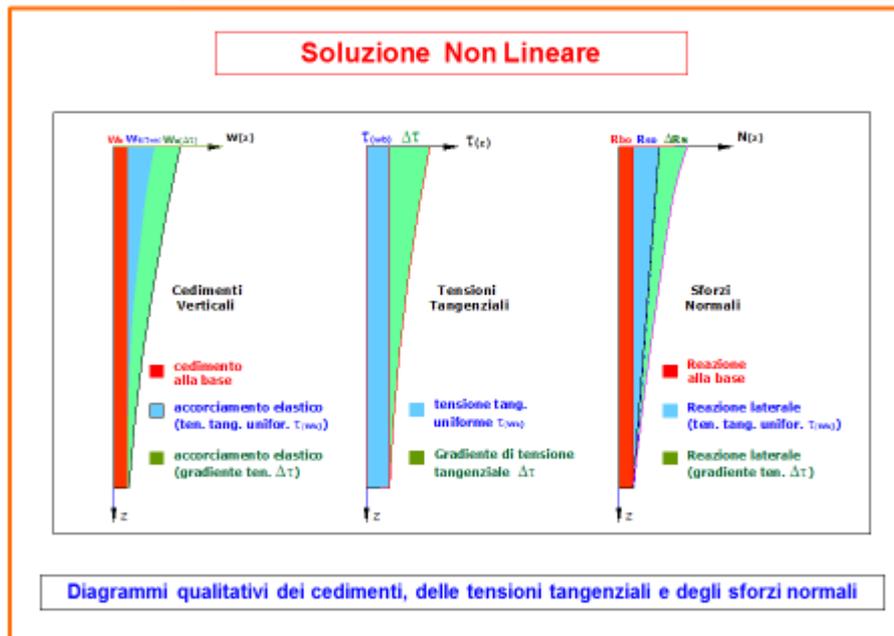
$$\lambda = \sqrt{\frac{K_{tan}}{EAL}}$$

$$b = \frac{R_{so}}{K_{tan}}$$

$$c = \frac{R_{bo}}{EA \cdot \lambda}$$



Diagrammi dei cedimenti e delle azioni interne



Componenti dei cedimenti e delle azioni interne

Noto il cedimento per accorciamento elastico sono definiti anche il cedimento totale [ $w(z)=w_b+w_e(z)$ ], lo sforzo tangenziale  $\tau=\tau(w)$  e lo sforzo assiale  $N=EA \frac{dw}{dz}$ . Risulta peraltro di interesse analizzare la composizione di queste grandezze. Il cedimento verticale si compone del cedimento impresso alla base come movimento uniforme, dell'accorciamento elastico (parabolico) indotto dalle tensioni uniformi mobilitate dal movimento di base e dell'accorciamento elastico indotto dall'incremento di sforzo assiale associato ai gradienti di tensioni tangenziali  $\Delta\tau$ . Le tensioni tangenziali si compongono ad ogni quota dei due contributi citati [ $\tau(w_b)$ ,  $\Delta\tau$ ]. Lo sforzo assiale infine include lo sforzo di compressione uniforme indotto lungo tutto il palo dalla reazione di base, la componente lineare associata alle tensioni tangenziali uniformi [ $\tau(w_b)$ ] indotte dallo spostamento rigido e la componente variabile associata agli incrementi di tensione tangenziale [ $\Delta\tau$ ].

**Soluzione Non Lineare (Lenzi-Campana)**

Parametro	Variabile indipendente	Coordinata
$\alpha = \sqrt{\frac{K_{tan} \cdot L}{EA}}$	Cedimento alla base [w <sub>b</sub> ]	$\zeta = \frac{z}{L}$

**Cedimento verticale della sezione  $\zeta = z/L$**

$$w(\zeta) = w_b + \left[ R_{so} \cdot \frac{\cosh(\alpha \cdot \zeta) - 1}{\alpha^2} + R_{bo} \cdot \frac{\sinh(\alpha \cdot \zeta)}{\alpha} \right] \cdot \frac{L}{EA}$$

**Sforzo assiale nella sezione  $\zeta = z/L$**

$$N(\zeta) = R_{so} \cdot \frac{\sinh(\alpha \cdot \zeta)}{\alpha} + R_{bo} \cdot \cosh(\alpha \cdot \zeta)$$

$R_{so}, R_{bo}, \alpha = f(w_b)$

*Soluzione Non lineare : cedimenti e sforzi assiali correnti*

**Soluzione Non Lineare (Lenzi-Campana)**

**Cedimento del palo** [sez. di sommità w<sub>o</sub> = w(L)]

$$w_o = w_b + \left[ R_{so} \cdot \frac{(\cosh \alpha - 1)}{\alpha^2} + R_{bo} \cdot \frac{\sinh \alpha}{\alpha} \right] \cdot \frac{L}{EA}$$

Spostamento  
impresso alla base

Accorciamento  
elastico del palo

**Carico applicato** [sez. sommità Q=N(L)]

$$Q = R_{so} \cdot \frac{\sinh \alpha}{\alpha} + R_{bo} \cdot \cosh \alpha$$

Meccanismo  
per attrito laterale

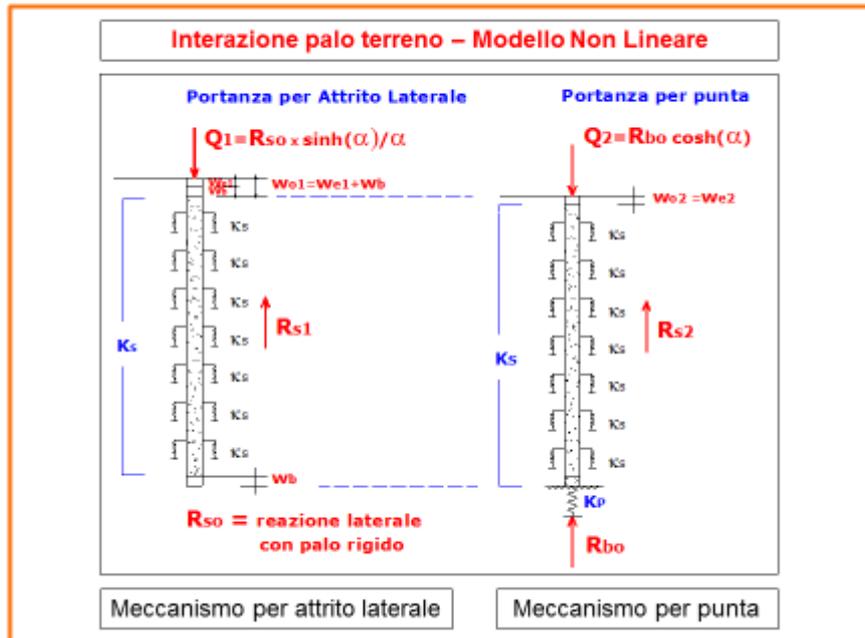
Meccanismo  
portante per punta

**Parametro**  
 $\alpha = \sqrt{\frac{K_{tan} \cdot L}{EA}}$

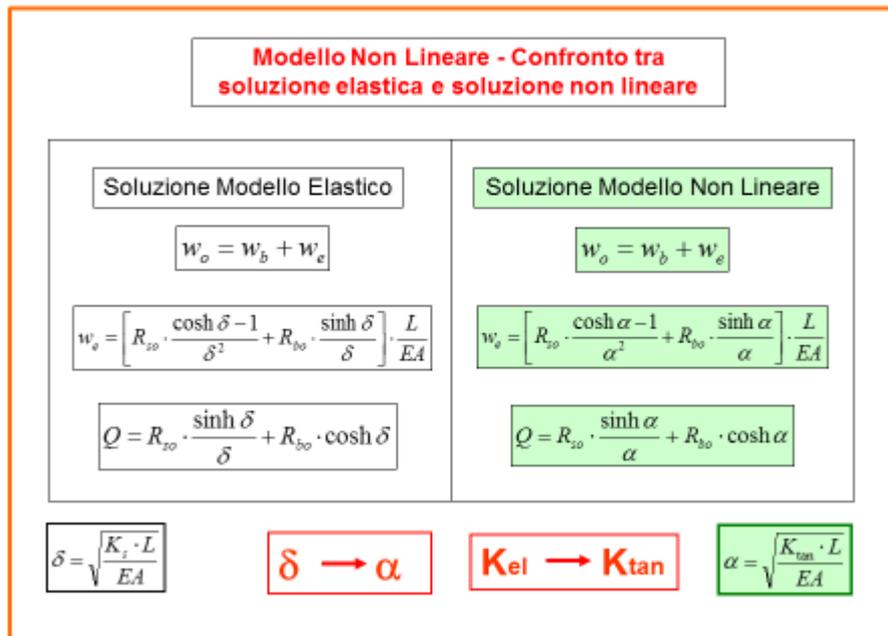
$R_{so}, R_{bo}, \alpha = f(w_b)$

*Soluzione Non lineare : cedimento e carico in sommità*

La soluzione non lineare è riportata, per la sezione cornute posta alla quota z sopra la punta del palo, e per la sezione di sommità, nelle figure allegate. Come si può verificare, il cedimento del palo consta del cedimento impresso alla base e del cedimento per accorciamento elastico del palo espresso in funzione dello sforzo normale medio. Il carico è invece equilibrato da una componente attivata dalla portanza laterale e da una componente attivata dalla portanza di base. Le grandezze coinvolte **R<sub>so</sub>**, **R<sub>bo</sub>**, **α** sono tutte funzioni del parametro indipendente, w<sub>b</sub>, ossia del cedimento impresso alla base. La soluzione è applicabile a legami costitutivi del terreno descritti da funzioni non lineari continue, monotone e derivabili.

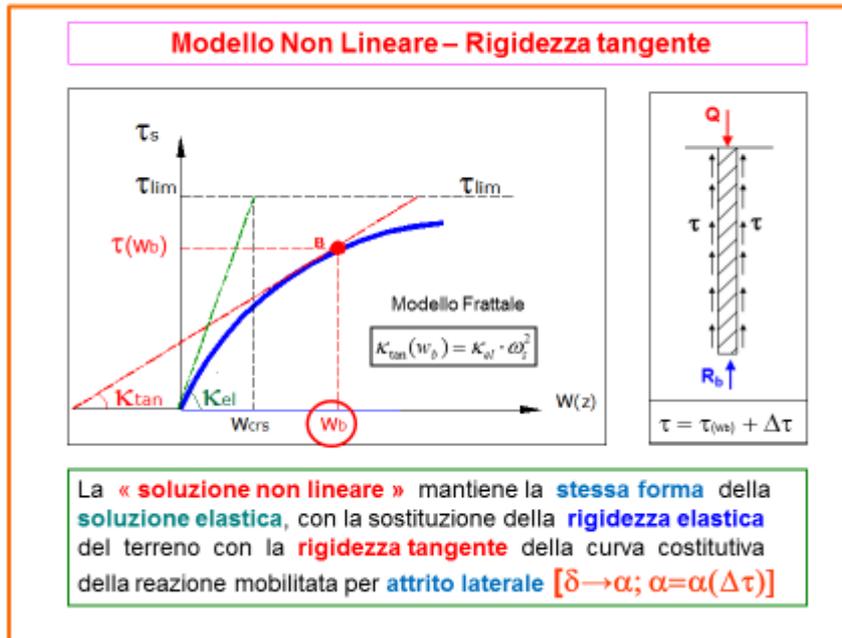


*Meccanismi portanti della soluzione non lineare*

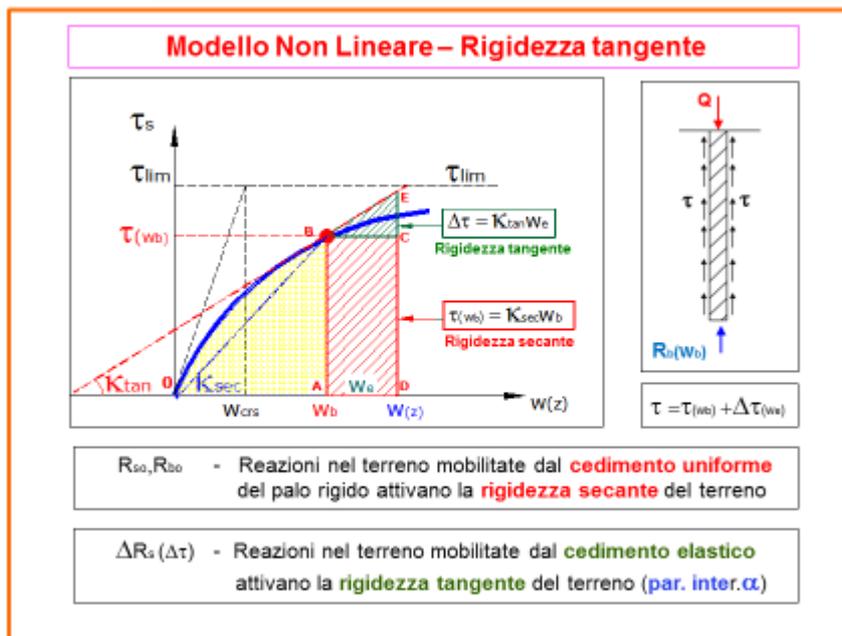


*Confronto tra soluzione elastica e soluzione non lineare*

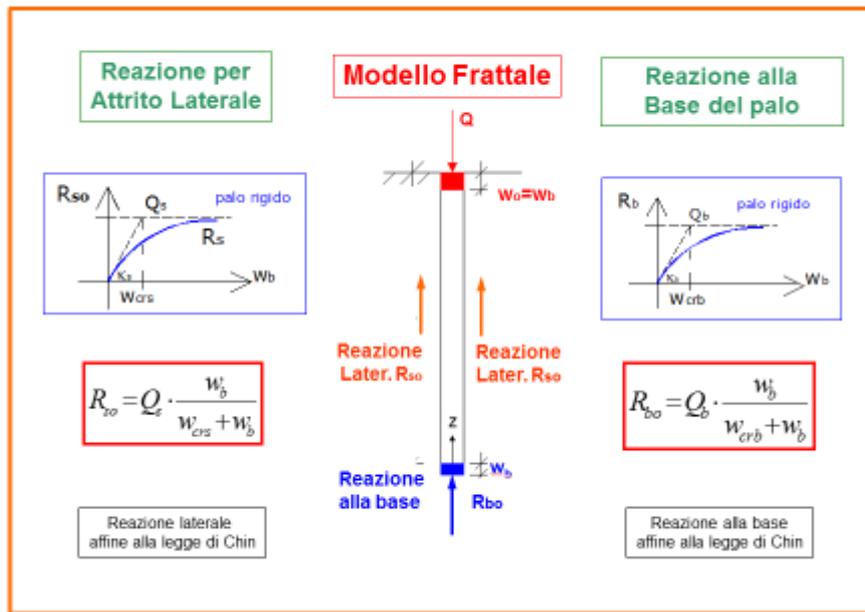
Il carico esterno è pertanto equilibrato dal meccanismo portante per attrito laterale e dal meccanismo portante per punta. Le reazioni computate nell'ipotesi di palo rigido e modello non lineare del terreno (associate quindi a tensioni tangenziali uniformi) si incrementano per effetto dell'accorciamento elastico che mobilita ulteriori incrementi di reazione tangenziale che sono messi in conto tramite le funzioni iperboliche. E' immediato riscontrare inoltre come la soluzione non lineare mantenga la stessa forma della soluzione elastica sostituendo al parametro di interazione elastica  $[\delta]$  il parametro di interazione non lineare  $[\alpha]$ , circostanza questa che corrisponde a sostituire alla rigidità elastica iniziale la rigidità tangente attivata dal vincolo per effetto del cedimento impresso alla base.



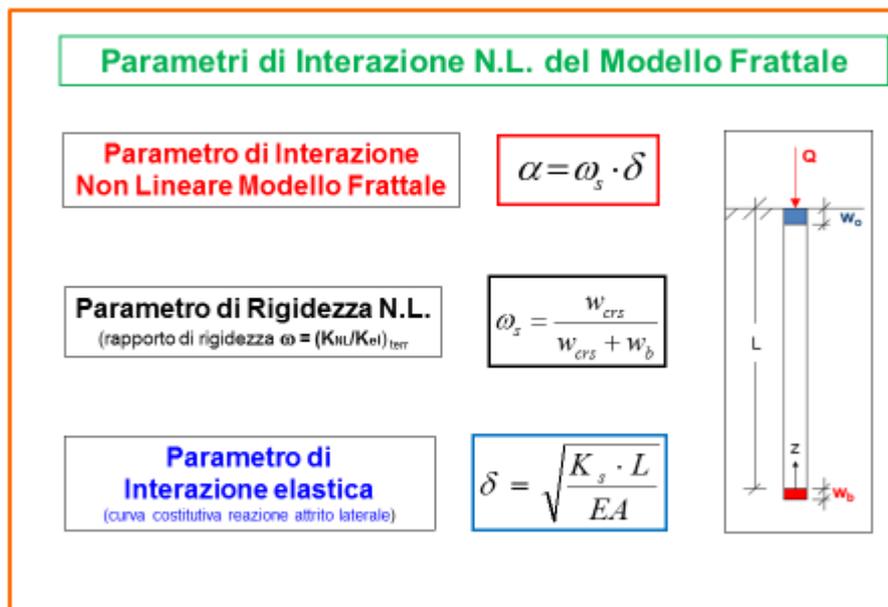
Rigidezza elastica e rigidezza tangente del vincolo d'interaccia



Componenti del lavoro di deformazione



Modello Frattale - Reazioni mobilitate dal terreno [ $R_{so}, R_{bo}$ ]



Modello Frattale – Parametro di interazione non lineare [ $\alpha$ ]

### Modello Frattale

Individuata la soluzione generale valida per i modelli costitutivi del terreno non lineari, si passa ora ad esplicitare la soluzione pertinente al modello frattale. In base a quanto illustrato occorre esplicitare i parametri dipendenti dal cedimento impresso alla base, e segnatamente le reazioni laterale ed alla base di palo rigido [ $R_{so}, R_{bo}$ ], ed il parametro di interazione non lineare [ $\alpha = \omega_s \delta$ ], che assumo le spresioni riportate nelle figure allegate.

Modello Non Lineare: Soluzione Frattale

$Q = C_s \cdot R_{so} + C_b \cdot R_{bo}$

$w_0 = w_b + w_e$

$R_{so} = Q_s \cdot \frac{w_b}{w_{cs} + w_b}$

$R_{bo} = Q_b \cdot \frac{w_b}{w_{cb} + w_b}$

Modello Non Lineare

**Cedimento palo**

$w_0 = w_b + w_e$

**Accorciamento elastico del palo**

$w_e = \frac{N_{med} L}{EA}$

**Carico applicato**

$Q = C_s \cdot R_{so} + C_b \cdot R_{bo}$

**Parametri**

$N_{med}, C_s, C_p$

**Variabile indipendente:**  
Cedimento impresso alla base [ $w_b$ ]

*Schema di soluzione non lineare*

Modello Frattale per l'Analisi Non Lineare (Lenzi - Campana)

$w_0 = w_b + w_e$

$R_{so} = Q_s \cdot \frac{w_b}{w_{cs} + w_b}$

$R_{bo} = Q_b \cdot \frac{w_b}{w_{cb} + w_b}$

$R_s = Q - R_{bo}$

Palo assialmente compressibile

**Cedimento palo**

$w_0 = w_b + w_e$

**Accorciamento elastico del palo**

$w_e = \left[ R_{so} \cdot \frac{\cosh \alpha - 1}{\alpha^2} + R_{bo} \cdot \frac{\sinh \alpha}{\alpha} \right] \cdot \frac{L}{EA}$

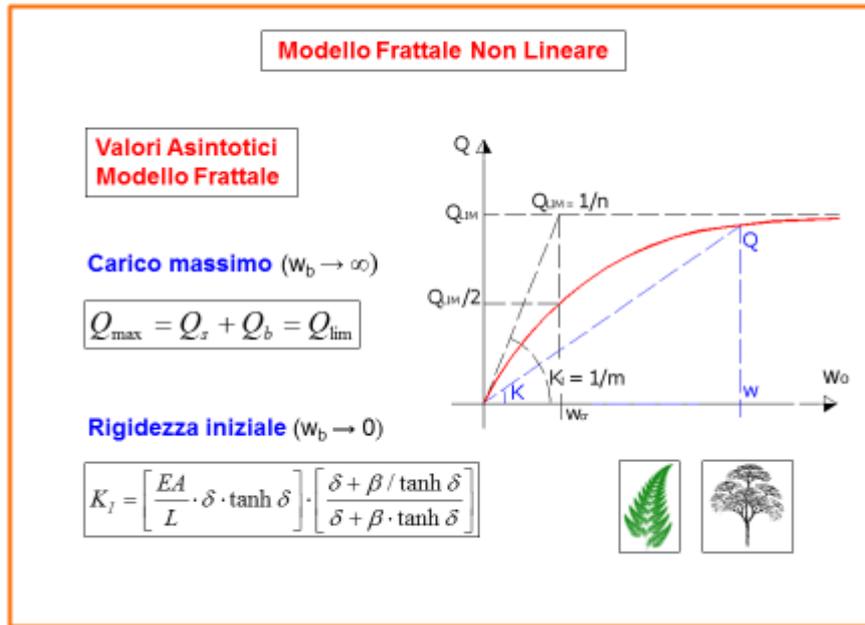
**Carico applicato**

$Q = R_{so} \cdot \frac{\sinh \alpha}{\alpha} + R_{bo} \cdot \cosh \alpha$

**Variabile indipendente**  
Cedimento alla base [ $w_b$ ]

*Soluzione del Modello Frattale*

Così operando si ricava la soluzione del Modello Frattale riportata nella figura allegata. Le formule campite in verde nella colonna di destra rappresentano la soluzione non lineare generale, valida s'intende nell'ambito di applicabilità dell'ipotesi assunta, largamente comprovata, di interazione modellabile mediante le curve di trasferimento. La soluzione frattale dipende dalle reazioni di palo rigido (e comportamento del terreno non lineare) e dal parametro di interazione corrispondente, evidenziato nelle formule campite in giallo. La variabile indipendente è sempre il cedimento impresso alla base. Nella colonna di destra sono invece esplicitate le relazioni valide per il modello frattale, ossia per curve di trasferimento del carico modellate con relazioni iperboliche.



*Valori asintotici del Modello Frattale*

### Soluzione Modello Frattale

**Cedimento sommità del palo**

$$w_o = w_b + \left[ R_{so} \frac{(\cosh \alpha - 1)}{\alpha^2} + R_{bo} \cdot \frac{\sinh \alpha}{\alpha} \right] \cdot \frac{L}{EA}$$

**Reazioni di palo rigido**

$$R_{so} = Q_s \cdot \frac{w_b}{w_{crs} + w_b}$$

**Carico applicato**

$$Q = \left[ R_{so} \frac{\sinh \alpha}{\alpha} + R_{bo} \cdot \cosh \alpha \right]$$

**Parametro inter.**

$$\alpha = \frac{w_{crs}}{w_{crs} + w_b} \cdot \delta$$

$$R_{bo} = Q_b \cdot \frac{w_b}{w_{crb} + w_b}$$

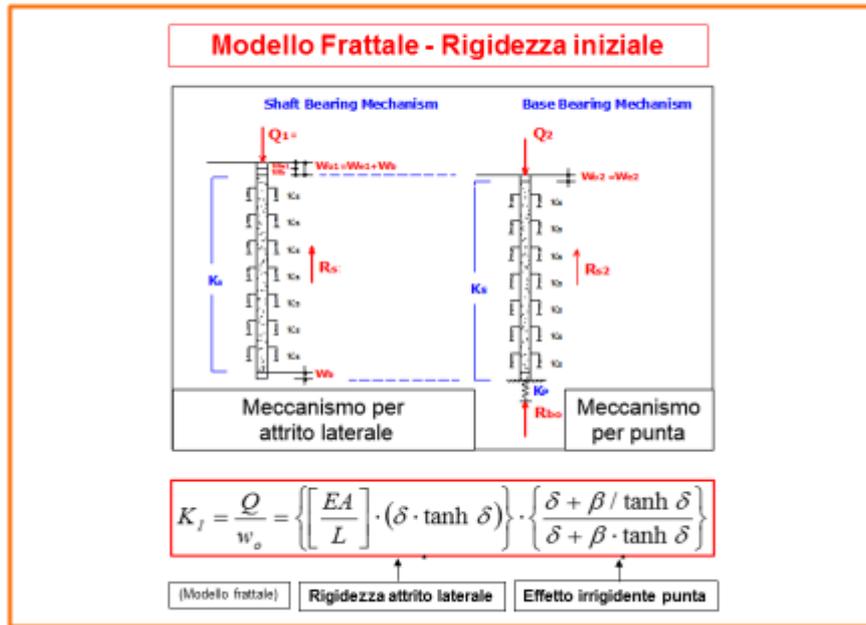
### Proprietà e valori asintotici del Modello Frattale

La soluzione frattale restituisce equazioni di semplice impiego che ne incentiva l'impiego. Occorre dall'altro canto verificare la plausibilità dei risultati teorici che essa fornisce. A questo riguardo il primo controllo da effettuare riguarda i valori asintotici forniti dal modello che restituisce, per cedimenti illimitati, un valore del carico massimo applicabile pari alla portanza limite del palo:

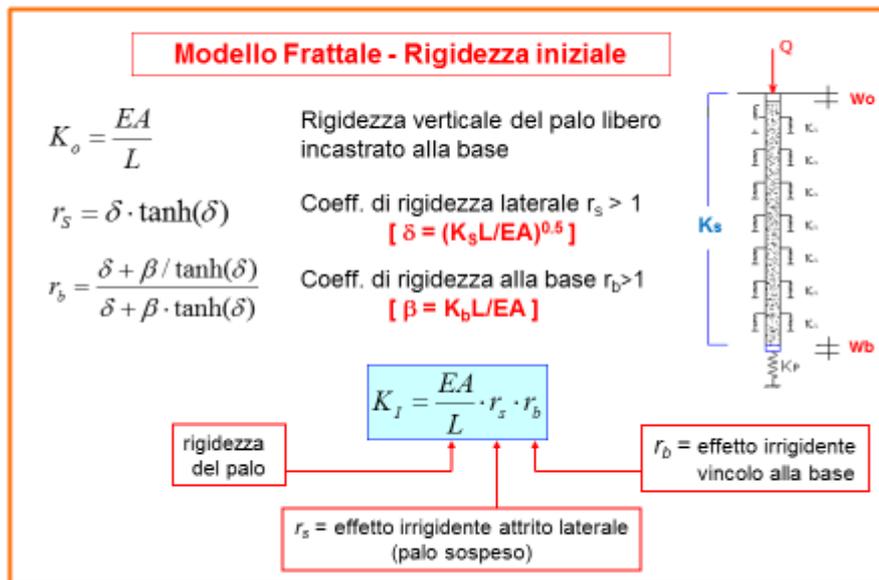
$$Q_{\max} = Q_s + Q_b = Q_{\lim}$$

Viceversa, per cedimenti modesti, fornisce correttamente il valore della rigidità elastica:

$$K_I = \left[ \frac{EA}{L} \cdot \delta \cdot \tanh \delta \right] \cdot \left[ \frac{\delta + \beta / \tanh \delta}{\delta + \beta \cdot \tanh \delta} \right]$$



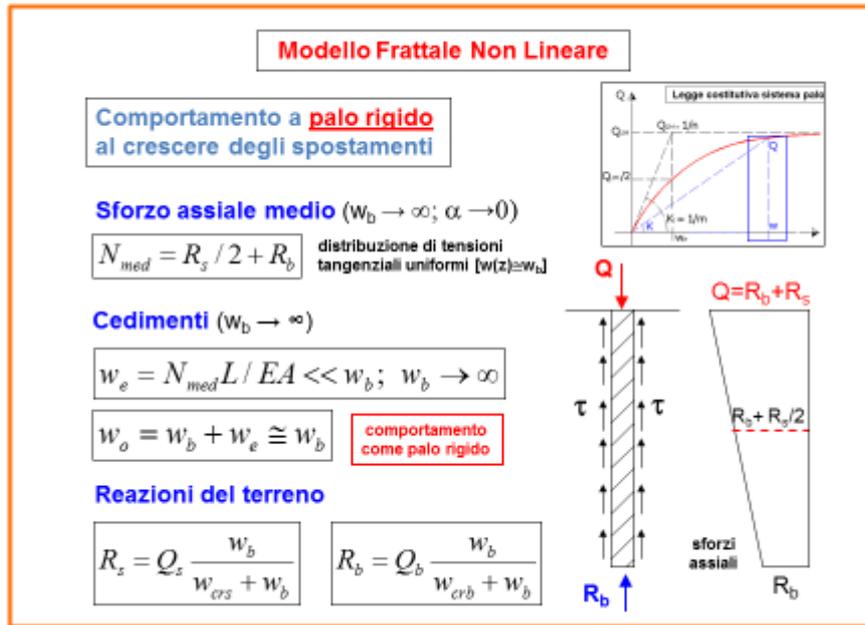
*Rigidezza elastica del palo*



*Componenti elastiche della rigidezza iniziale del palo*

La rigidezza iniziale del sistema palo-terreno coincide quindi con quella fornita dalla soluzione elastica. Come si può riscontrare, essa consta della rigidezza assiale propria del palo incrementata per effetto della rigidezza attivata dal meccanismo per attrito laterale (palo sospeso) e per effetto della rigidezza del vincolo elastico posto sotto la base del palo. In termini sintetici si pone:

$$K_I = \frac{EA}{L} \cdot r_s \cdot r_b$$



*Comportamento a palo rigido e terreno plastico per grandi cedimenti*

**Comportamento di palo rigido per grandi spostamenti**

Il comportamento del palo descritto dalla soluzione frattale viene a coincidere, per grandi spostamenti, con quello di un palo rigido immerso in un terreno a comportamento non lineare-plastico, ossia con il modello descritto dal metodo empirico di Fleming.

**Flessibilità e cedimenti – Relazione di Chin**

La verifica della rispondenza in scala integrale dei risultati forniti dal modello frattale in confronto con il modello iperbolico di Chin è fornita in forma chiara ed esaustiva dalla curva di flessibilità, rappresentata dal rapporto  $w/Q$  tra cedimento del palo e carico applicato espressa in funzione del cedimento stesso. Come mostrano le figure allegate, l'andamento della curva di flessibilità si mantiene, come atteso, sostanzialmente lineare, non solo a grandi spostamenti ( $w/w_{cr} > 1$ ) ma anche per modesti valori dei cedimenti ( $w/w_{cr} < 1$ ). Si ha quindi in tal modo una conferma della plausibilità delle ipotesi assunte essendo largamente comprovata da innumerevoli risultati di prove di carico la relazione lineare esistente tra flessibilità e cedimenti.

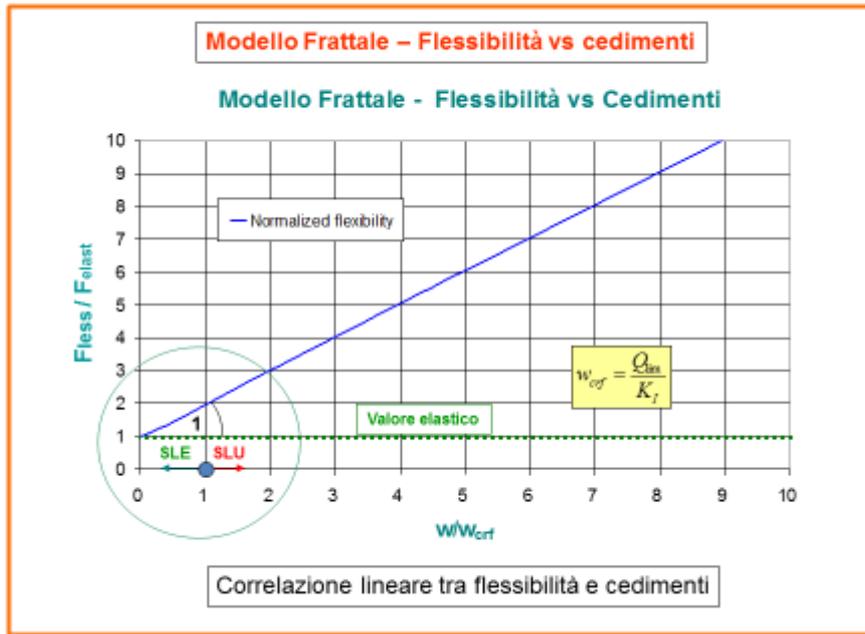
**Ripartizione del carico per attrito laterale e per punta**

Il modello frattale fornisce anche la possibilità di determinare la ripartizione del carico tra il meccanismo per attrito laterale ed alla punta. A tal riguardo si utilizzano le formule :

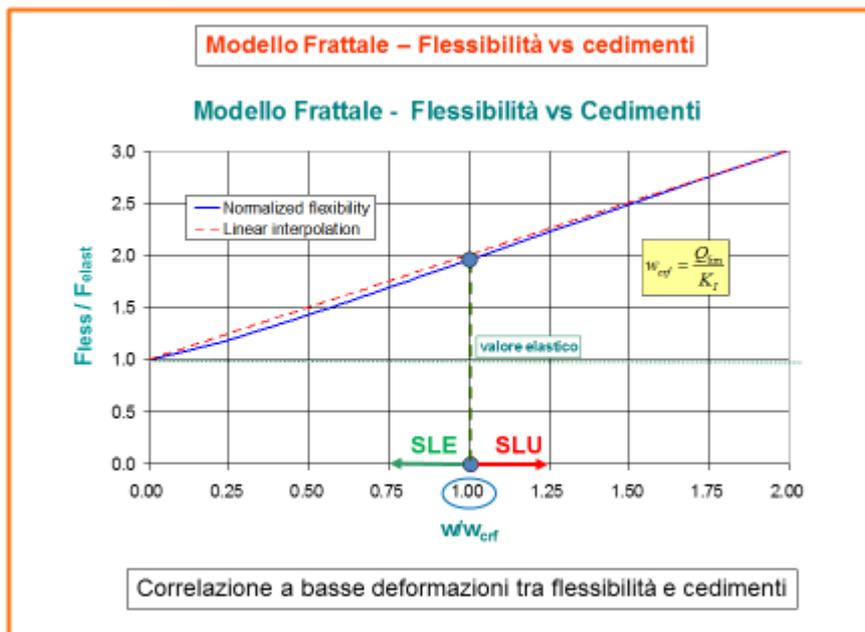
$$Q = Q_s \cdot \frac{w_b}{w_{crs} + w_b} \cdot \frac{\sinh \alpha}{\alpha} + Q_b \cdot \frac{w_b}{w_{crb} + w_b} \cdot \cosh \alpha$$

$$R_b = \frac{w_b}{w_{crb} + w_b} \cdot Q_b$$

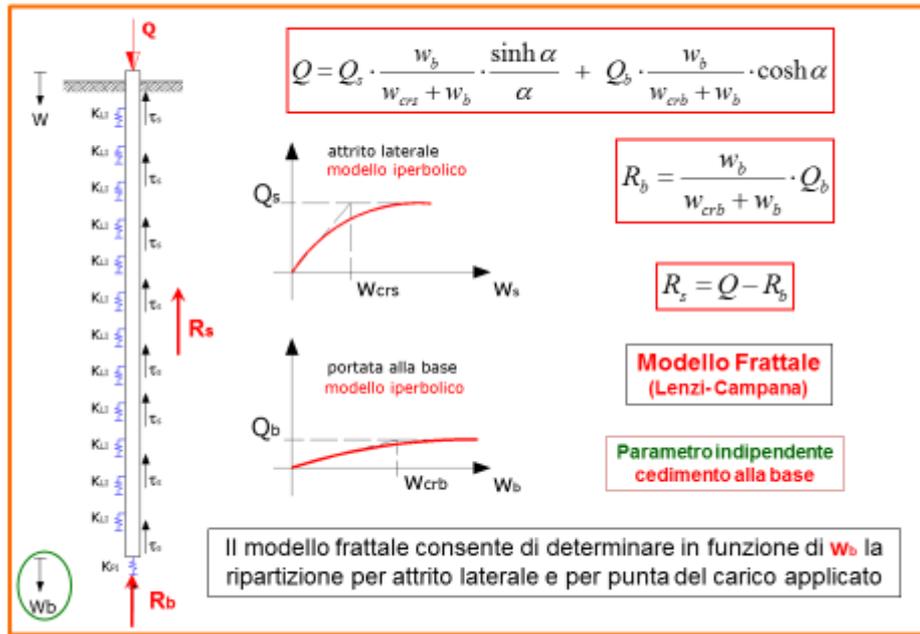
$$R_s = Q - R_b$$



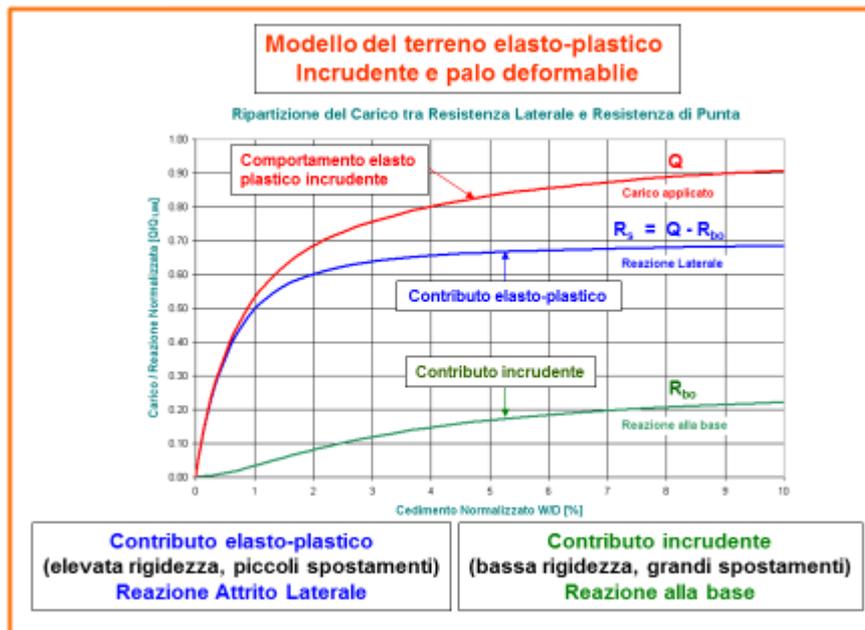
*Flessibilità del palo in funzione del cedimento*



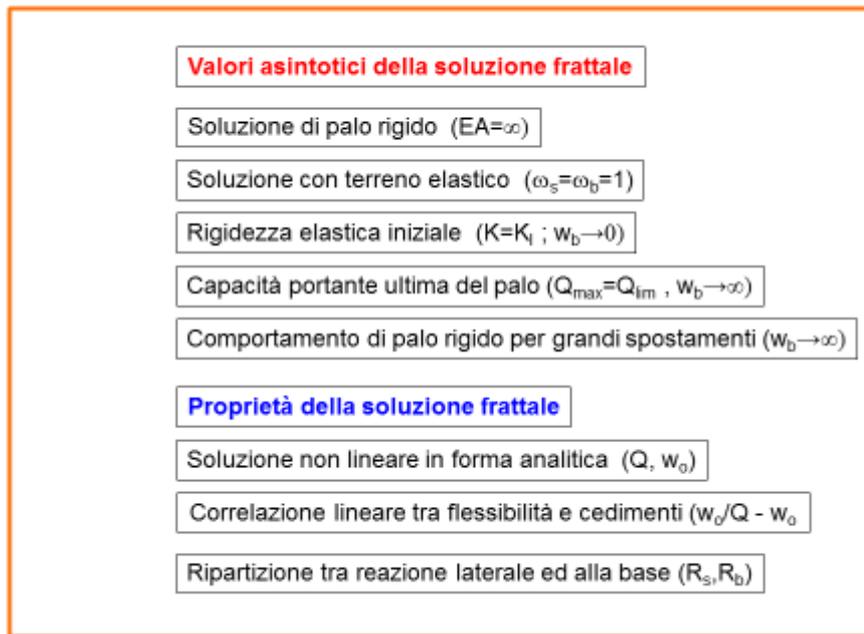
*Dettaglio della curva di flessibilità per cedimenti modesti*



Schema di ripartizione del carico per attrito laterale reazione di punta



Ripartizione del carico tra meccanismi plastici ed incrudenti



### *Riepilogo dei valori asintotici e delle proprietà del Modello Frattale*

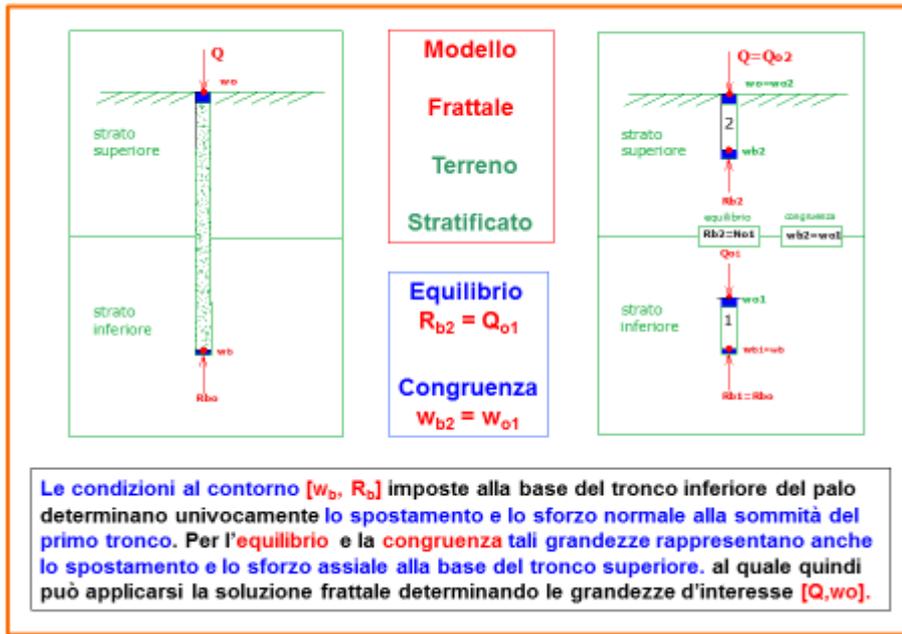
I grafici allegati evidenziano come, per un palo snello, la reazione laterale sia caratterizzata da un'elevata rigidezza iniziale e quindi da piccoli spostamenti sino a plasticizzazione raggiunta. Viceversa il meccanismo di portanza alla punta presenta le caratteristiche tipiche di un lavoro incrudente, ossia di un meccanismo associato ad una bassa rigidezza ed ad una reazione attivata con grandi spostamenti. La sovrapposizione dei due contributi resistenti fornisce il classico andamento non lineare che caratterizza la curva carichi-cedimenti di un palo.

### **Riepilogo dei valori asintotici e delle proprietà del Modello Frattale**

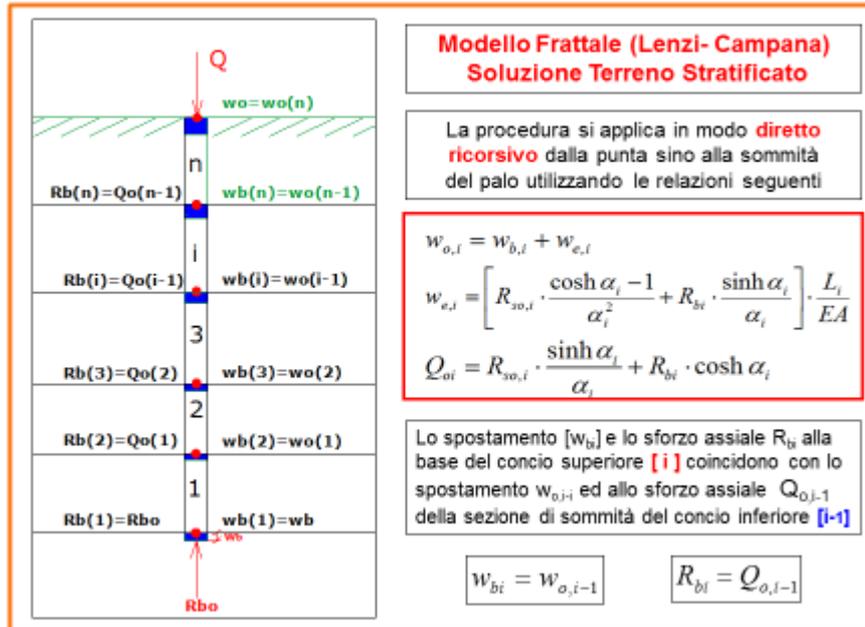
In figura sono riassunte le caratteristiche salienti della soluzione frattale.

### **Modello di terreno stratificato**

I terreni di sedime si presentano nella maggioranza dei casi contraddistinti da eterogeneità sia nella stratigrafia sia nelle caratteristiche geotecniche. La soluzione frattale è immediatamente estendibile al caso di terreno non omogeneo, assumendo ancora come variabile indipendente il cedimento impresso alla base del palo. Si considera dapprima il caso di un terreno a due strati e si divide il palo in due tronchi immersi ciascuno in terreno omogeneo, evidenziando lo sforzo assiale e lo spostamento verticale della sezione di transizione. Essendo assegnato il cedimento alla base, la soluzione frattale permette di ricavare il valore del carico e dello spostamento della sezione di sommità del tronco inferiore. Per l'equilibrio del nodo e per la congruenza interna dei movimenti, la reazione verticale alla sommità del tronco inferiore viene a coincidere con la reazione agente alla base del tronco superiore. Analogamente lo spostamento della sommità del tronco inferiore viene a coincidere con lo spostamento della base del tronco superiore. Anche per il secondo tronco sono pertanto definite le condizioni alla base e quindi, applicando nuovamente il modello frattale è possibile ricavare direttamente lo spostamento ed il carico della sezione di sommità del secondo tronco, ossia della sommità del palo.



*Modello a due strati*



*Modello Frattale per terreno stratificato*

La procedura si estende nel medesimo modo anche al caso di un terreno comprendente un numero generico di strati, secondo la modalità illustrata in figura. Nella sostanza si tratta di applicare in sequenza la soluzione frattale ad un insieme di pali sovrapposti.

**ESEMPIO**  
**APPLICATIVO**

**ESEMPIO  
APPLICATIVO  
(Back Analysis)**



FONDAZIONI SU PALI - TREFOLO  
CAMPUS UNIVERSITARIO FORLÌ

*Prova di carico dei pali del Nuovo Campus Universitario di Forlì*

**Caratteristiche palo / terreno**

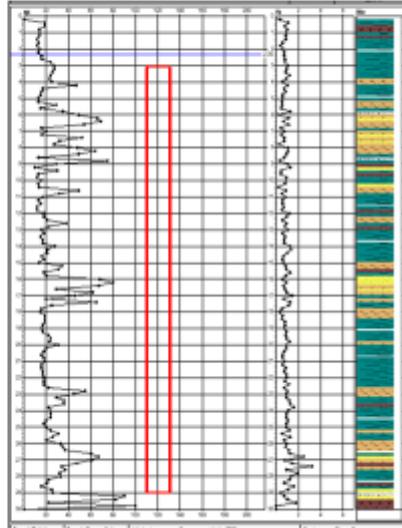
**Tipologia:**  
Palo ad elica continua (CFA)  
senza asportazione del terreno

**Diametro**  
 $D = 0.60 \text{ m}$

**Lunghezza**  
 $L = 26 \text{ m}$

**Portata laterale**  
 $\tau_{sm} = 50 \text{ KPa}$   
 $Q_s = 2450 \text{ KN}$

**Portata base**  
 $q_b = 4500 \text{ KPa (CFA-FDP)}$   
 $Q_b = 1275 \text{ KN}$

**Diagramma prova penetrometrica**

*Caratteristiche dei pali CFA e stratigrafia del sito*
**Parametri di interazione**

**Carico limite laterale/punta**  
 $Q_s = 2450 \text{ KN}$   
 $Q_b = 1275 \text{ KN}$

**Rigidezza elastica laterale**  
 $c_s = 0.0035 \text{ (0.35\%)} \text{ [G/\tau} \cong 600]$   
 $w_{crs} = c_s \cdot D = \underline{2.10 \text{ mm}}$   
 $K_s = Q_s/w_{crs} = 1167 \text{ KN/mm}$

**Rigidezza elastica alla base**  
 $c_b = 0.025 \text{ (2.5\%)} \text{ [E}_b/q_b \cong 25]$   
 $w_{crb} = c_b \cdot D = \underline{15 \text{ mm}}$   
 $K_b = Q_b/w_{crb} = \underline{84.9 \text{ KN/mm}}$

**Parametri di interaz. elastica**  
 $\delta = 1.890 \rightarrow r_s = 1.806$   
 $\beta = 0.260 \rightarrow r_b = 1.011$

**Parametri caratteristici**

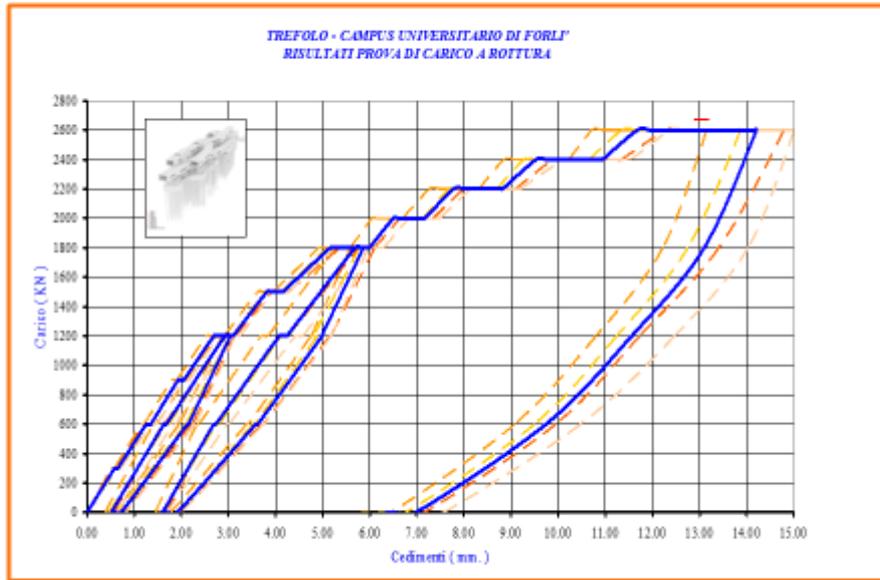
**Carico limite**  
 $Q_{LIM} = Q_s + Q_b = 3725 \text{ KN}$

**Rigidezza iniziale**  
 $K_i = (EA/L) r_s r_b = 596.3 \text{ KN/mm}$   
 $\lambda = L/\delta = 13.76 \text{ m (lunghezza attiva)}$

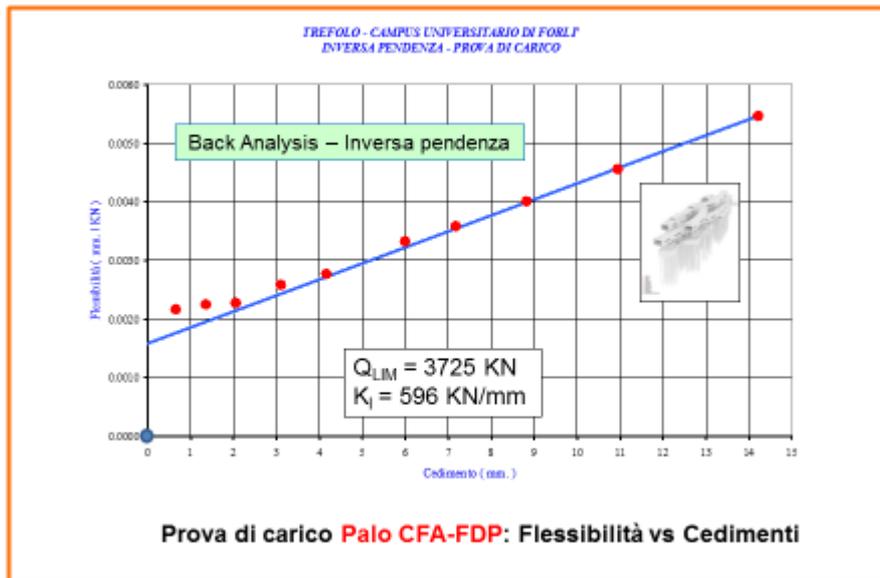
**Cedimento critico**  
 $w_{cr} = Q_{LIM}/K_i = 6.25 \text{ mm}$   
 $c_{cr} = w_{cr} / D = 0.01$

**Carico ultimo (AGI 84)**  
 $Q_{ult} = 8/9 \cdot Q_{LIM} = 3300 \text{ KN}$   
 $w_{ult} = 8 w_{cr} = 50 \text{ mm}$

*Parametri di portata limite e di interazione elastica*



Misure dei cedimenti registrati nella prova di carico di progetto



Metodo dell'inversa pendenza: flessibilità vs cedimenti

CORRELAZIONE  
CARICHI - CEDIMENTI

$$w_o = w_b + w_e$$

$$w_e = \left[ R_{so} \cdot \frac{\cosh \alpha - 1}{\alpha^2} + R_{bo} \cdot \frac{\sinh \alpha}{\alpha} \right] \cdot \frac{L}{EA}$$

$$Q = R_{so} \cdot \frac{\sinh \alpha}{\alpha} + R_{bo} \cdot \cosh \alpha$$

$Q_{LIM} = 3725 \text{ KN}$

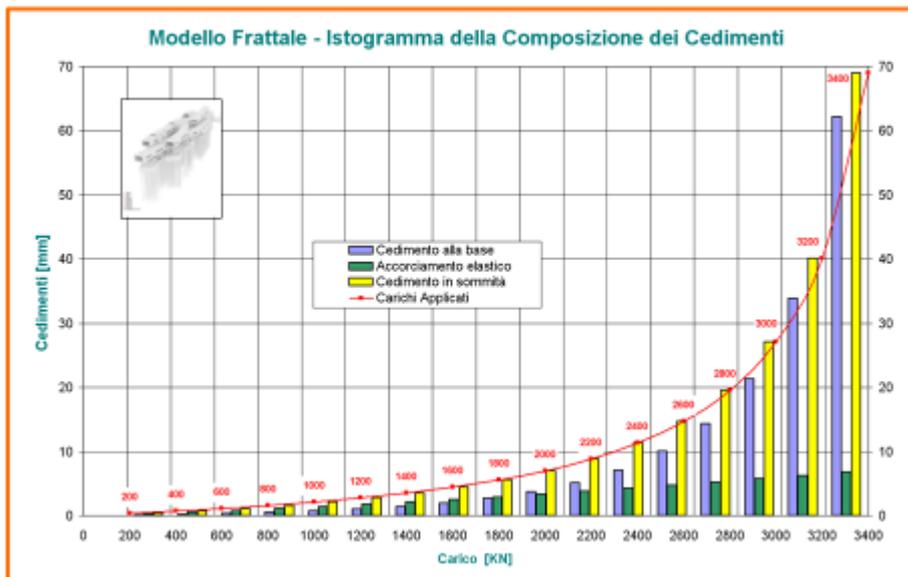
$K_l = 596.3 \text{ KN/mm}$

$w_{CR} = 6.25 \text{ mm}$

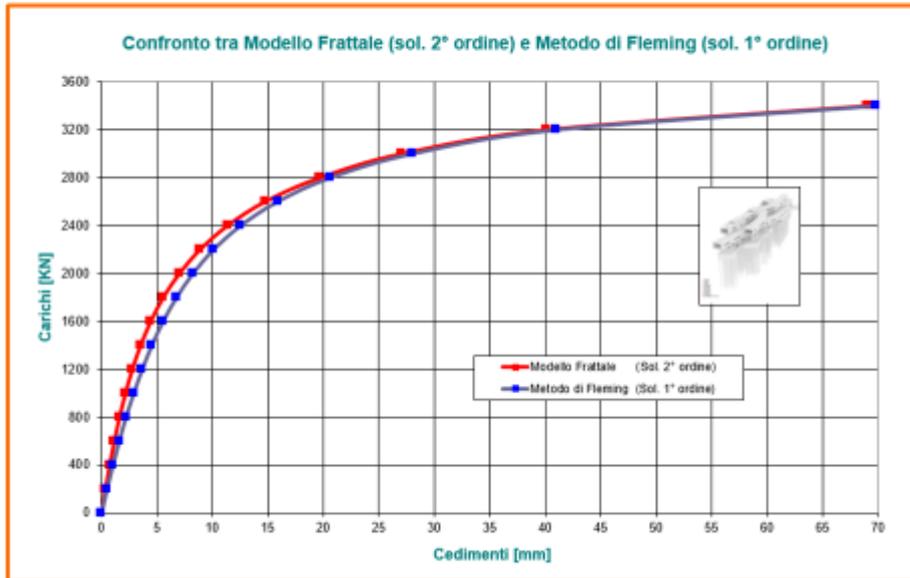
Modello Non Lineare  
Soluzione Frattale

Modello Frattale (Lenzi - Campana)							
$w_b$	$\phi_b$	$\alpha$	$R_{so}$	$R_{bo}$	$w_e$	$w_o$	$Q$
m	[°]	[°]	KN	KN	m	[mm]	[KN]
0,00000	1,000	1,890	0	0	0,0000	0,00	0
0,00010	0,957	1,808	106	8	0,0003	0,35	200
0,00021	0,909	1,719	223	18	0,0005	0,73	400
0,00035	0,857	1,621	349	29	0,0008	1,15	600
0,00052	0,801	1,513	489	43	0,0011	1,61	800
0,00074	0,738	1,396	642	60	0,0014	2,15	1000
0,00103	0,670	1,267	808	82	0,0017	2,77	1200
0,00142	0,596	1,128	989	110	0,0021	3,52	1400
0,00195	0,519	0,981	1179	146	0,0025	4,43	1600
0,00268	0,440	0,831	1373	193	0,0029	5,56	1800
0,00369	0,363	0,685	1562	251	0,0033	7,01	2000
0,00511	0,291	0,550	1737	324	0,0038	8,88	2200
0,00712	0,228	0,430	1892	410	0,0042	11,36	2400
0,01002	0,173	0,327	2026	510	0,0047	14,74	2600
0,01437	0,128	0,241	2138	623	0,0052	19,59	2800
0,02133	0,090	0,169	2231	748	0,0057	27,06	3000
0,03386	0,058	0,110	2307	883	0,0062	40,11	3200
0,06222	0,033	0,062	2370	1026	0,0068	68,99	3400

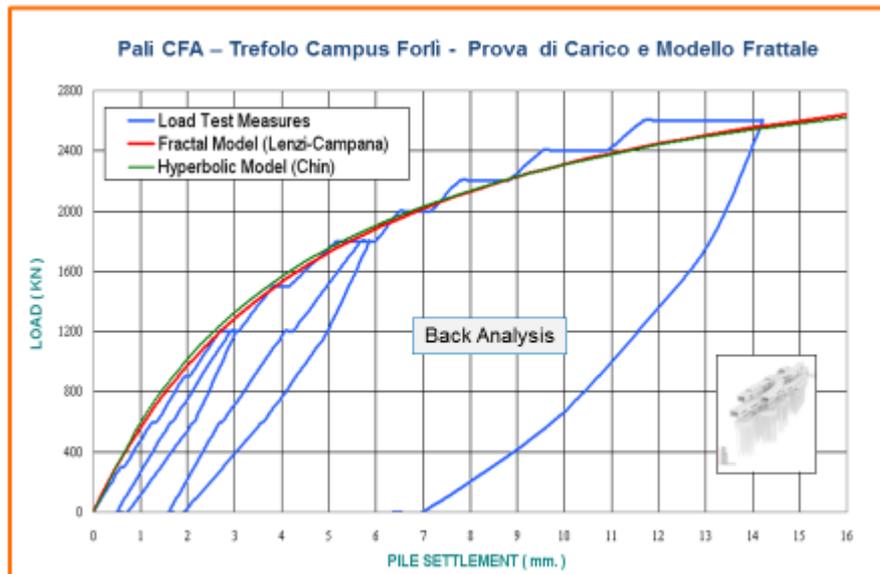
Modello Frattale: dettaglio della soluzione analitica



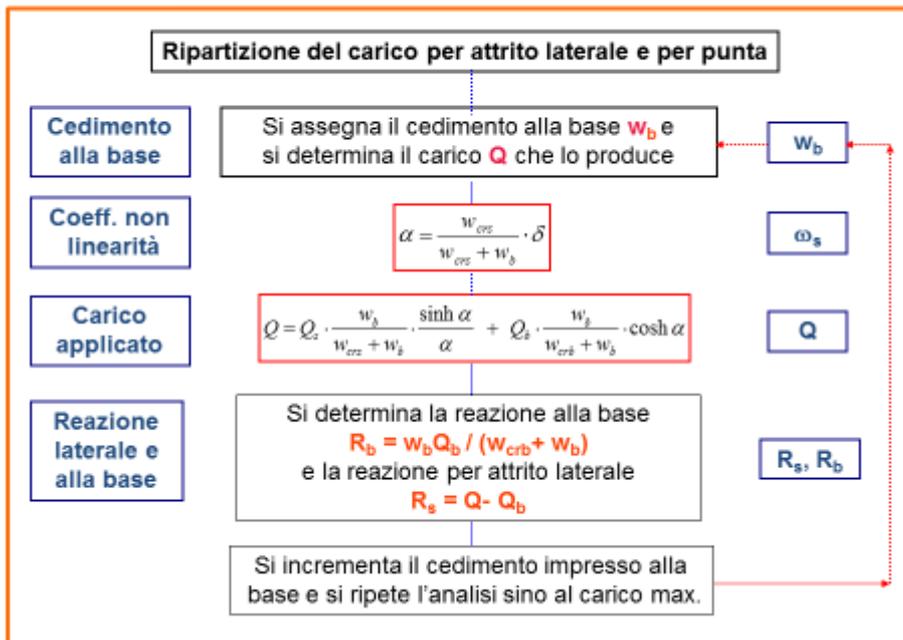
Modello Frattale: cedimenti di base ed in sommità ed accorciamento elastico



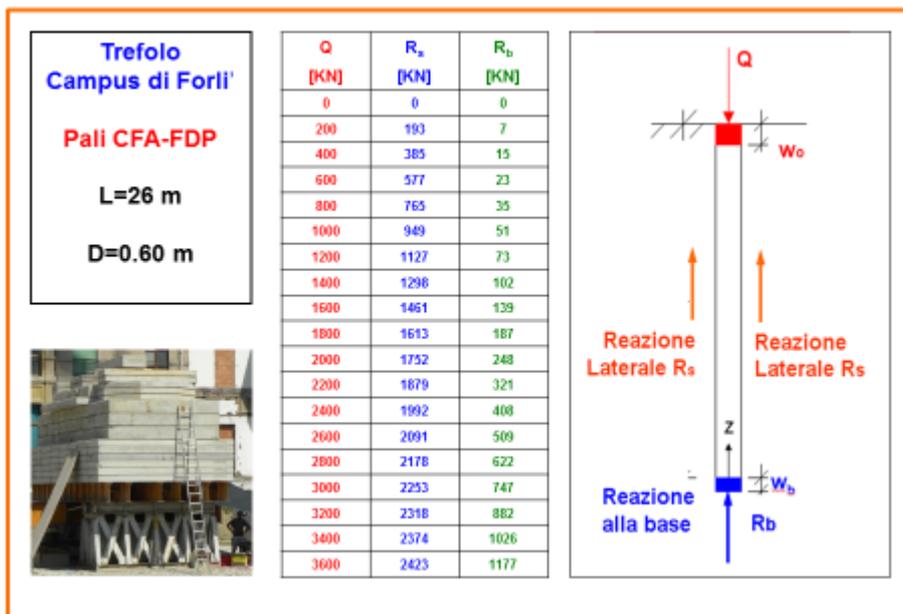
Modello Frattale: Curva carichi – Cedimenti



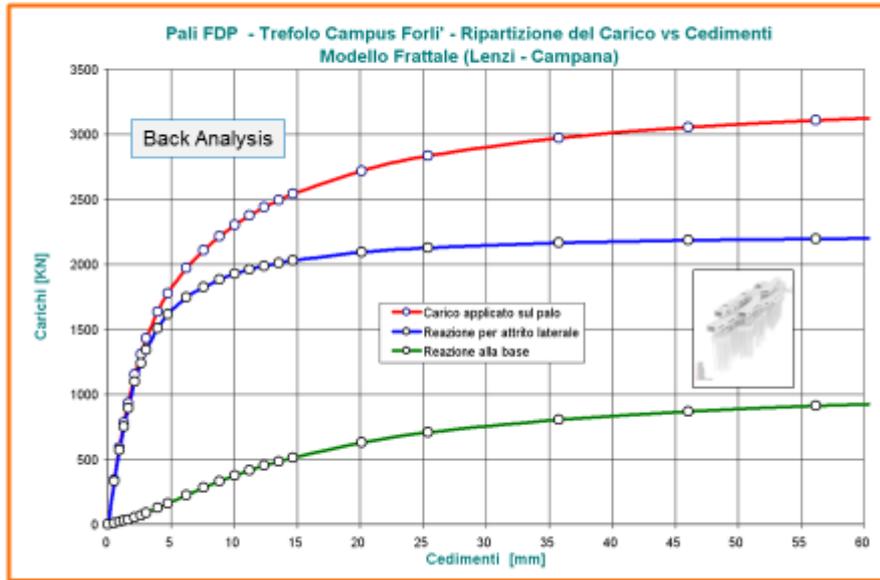
Confronto tra modello frattale, modello di Chin e prova di carico



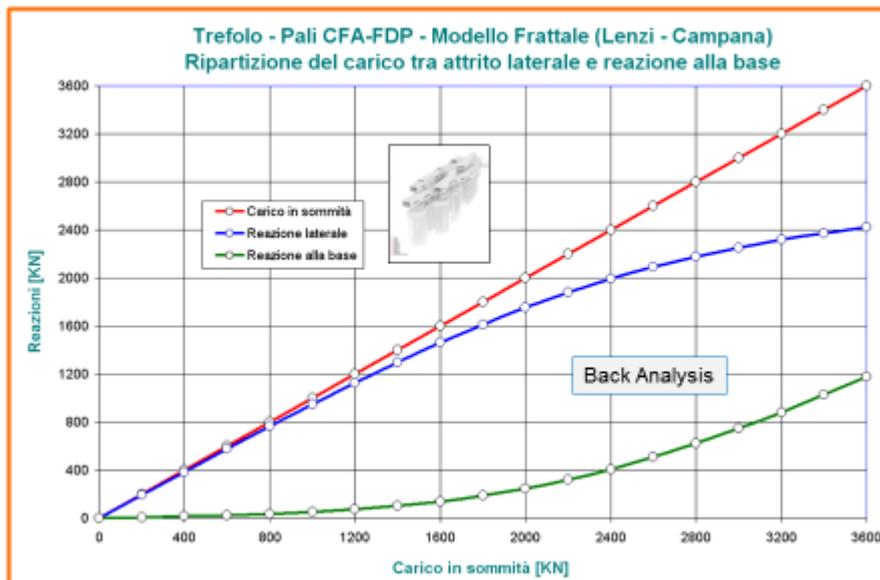
*Critero di ripartizione del carico del Modello Frattale*



*Ripartizione del carico tra reazione laterale e reazione per punta*



Ripartizione del carico in funzione del cedimento del palo



Andamento della reazione laterale e della reazione per punta

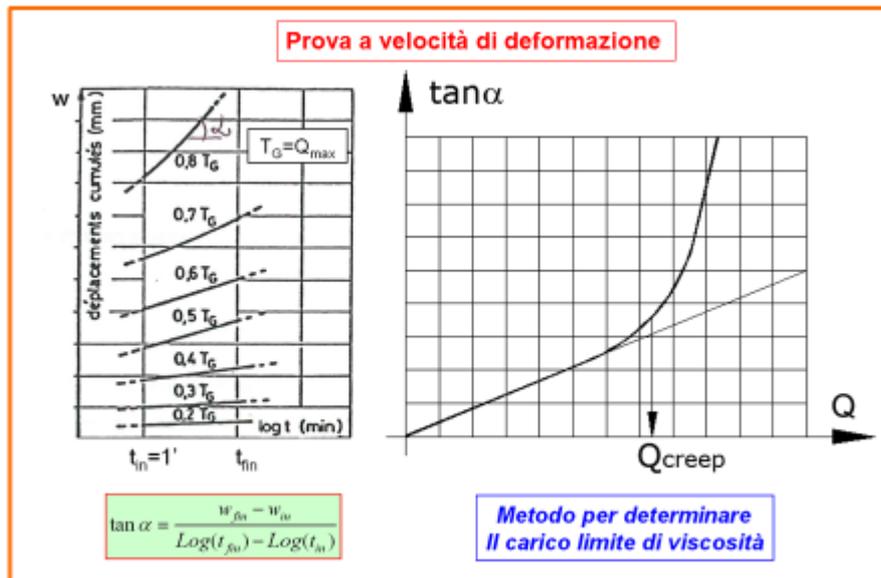
Prova di carico Pali FDP - Trefolo - Campus Universitario di Forlì



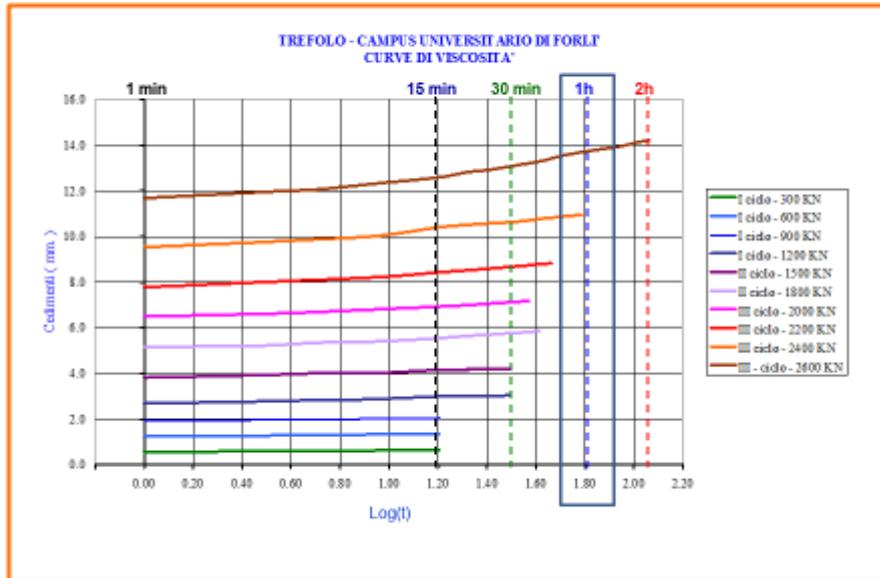
Controllo delle deformazioni viscosi del terreno

Fluage (creep): fenomeno che si manifesta come incremento nel tempo delle deformazioni plastiche nel terreno sotto l'applicazione di un carico costante

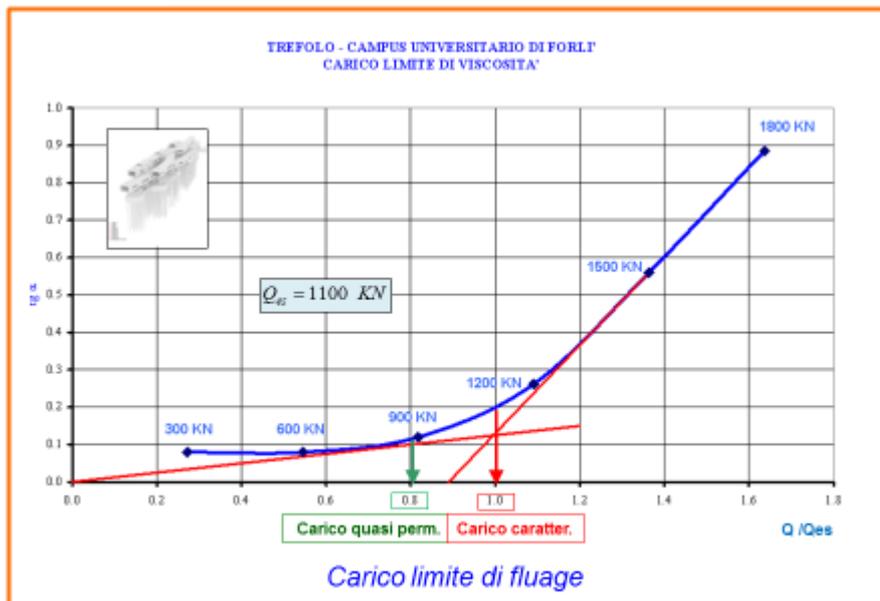
Curva carichi e cedimenti della prova di carico



Incrementi di cedimenti a carico costante



Incrementi di cedimenti registrati nel corso della prova di carico



Carico limite di fluage

**Riferimenti Bibliografici**

- [1] F.K. Chin, *The inverse slope as a prediction of the ultimate bearing capacity of piles*, Proceedings of the 3<sup>rd</sup> S.E. Asian Conf. Soil Eng., pp. 81-92, Hong Kong, 1972.
- [2] H.G. Poulos, E.H. Davis, *Pile Foundation Analysis and Design*, University of Sydney, Ch. 5, Wiley, N.Y., 1980.
- [3] A.G.I., *Raccomandazioni sui Pali di Fondazione*, Associazione Geotecnica Italiana, Roma, 1984.
- [4] W.G. K. Fleming, *A new method for single pile settlement prediction and analysis*, Geotechnique, nr. 42, pp. 411-425, ICE, London, 1992.
- [5] F. Castelli, M. Mangeri, E. Motta, *Analisi non lineare dei cedimenti di un palo singolo*, Rivista Italiana di Geotecnica, nr. 2, 1992, pp. 115-135, Roma, 1992.
- [6] R. Lancellotta, *Geotechnical Engineering*, A. A. Balkema, Rotterdam, 1995.
- [7] Y. Chou, Y. Hsiung, *Normalized Equation of Axially Loaded Piles in Elastic-Plastic Soil*, Journal of GeoEngineering, Vol. 4, no.1, pp. 1-7, 2009.
- [8] G. Dalerci, R. Bovolenta, *A new method for the evaluation of the ultimate load of piles by tests not carried to failure*, XV European Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering, pp. 837-842, Athens, 2011.
- [9] C. Viggiani, A. Mandolini, G. Russo, *Piles and Pile Foundations*, Ch. 5-7, Spon Press, London, 2012.
- [10] M. Lenzi, P. Campana, *Buckling Analysis of Piles Partially Embedded*, Deep Foundation Institute, DFI Marine Foundation Seminar, Norfolk, Virginia, USA, 2012.
- [11] M. Lenzi, P. Campana, *A New Linear Fractal Model for the Analysis of Foundation Piles*, DFI, Deep Foundation Institute, 40<sup>th</sup> DFI Annual Conference, Oakland, California, USA, 2015.

*Riferimenti Bibliografici*